



Solving the pollution equations by using the Chebyshev super-spectral viscosity method

Ladan Roshanaei¹ , and Elham Darvishi^{2✉}

1. Department of Water Science and engineering, Campus of Agriculture and Natural Resources, Razi University, Kermanshah. Iran. E-mail: l.roshanayi@razi.ac.ir
2. Corresponding author, Department of Water Science and engineering, Campus of Agriculture and Natural Resources, Razi University, Kermanshah. Iran. E-mail: e.darvishi@razi.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:

Received 06 April 2025
Received in revised form 29 June 2025
Accepted 31 July 2025
Available online 23 September 2025

Keywords:

pollution,
Advection-Diffusion-Reaction,
spectral Method,
super-spectral viscosity.

ABSTRACT

Objective: The objective of this research is to solve the pollution equation using the Chebyshev spectral method and the Chebyshev super-spectral viscosity method.

Method: Spectral and quasi-spectral methods that have been developed in recent years are able to calculate the solution with higher accuracy than analytical and numerical methods using fewer nodes and less time. These methods have not been investigated for solving pollution equations so far. In this study, the solution of pollution equations using the Chebyshev spectral method and the Chebyshev super spectral viscosity method is investigated. The results of these methods will be compared with the analytical solution under different boundary conditions.

Results: In this study, the accuracy of the Chebyshev spectral method and the Chebyshev super spectral viscosity method for solving pollution equations in two modes of continuous and stepwise pollutant injection was investigated in comparison with the analytical solution. The results of these two methods in solving the advection equation showed that with increasing the number of points, the numerical results are closer to the analytical solution, and with the same number of points, the Chebyshev super spectral viscosity method has a higher accuracy in calculating the pollution concentration. However, none of the graphs match the analytical results. The mentioned methods were used to solve the advection-diffusion and advection-diffusion-reaction equations in stepwise injection and were compared with the analytical results. The Chebyshev super spectral method with the same number of points has a higher accuracy than the Chebyshev spectral method in solving the advection-diffusion equation. The results of this method are completely consistent with the analytical results. Also, both methods have the same results for solving the advection-diffusion-reaction equation, which have a high accuracy compared to the analytical solution.

Conclusions: the results of this study showed that the Chebyshev spectral methods with high accuracy in solving the pollution equations, the number of points required for them is independent of the length of the river. Thus, at a short length, the number of points required is required in a channel or river with a large length.

Cite this article: Roshanaei, L., & Darvishi, E. (2025). Solving the pollution equation by using the Chebyshev super-spectral viscosity method. (2025). *Advanced Technologies in Water Efficiency*, 5 (3), 75-91. <https://doi.org/10.22126/atwe.2025.12133.1167>



© The Author(s)
<https://doi.org/10.22126/atwe.2025.12133.1167>

Publisher: Razi University.

Introduction

Today, the issue of pollution transfer in rivers is considered one of the greatest environmental challenges and it has profound effects on aquatic ecosystems and public health. The main causes of water pollution include pollutants, which include two categories of point and non-point sources. Point source pollutant injection comes in two forms: instantaneous (momentary) and continuous. The governing equation of flow in the conditions of pollution conditions of the Second order linear non-homogeneous partial differential equation is that different analytical and numerical methods have been used to solve it. Some of these methods include the; Laplace transform (Kumar.2020), finite volume (Kumar et al, 2021; & Chen et al. 2019), finite difference (Noye, 1987), finite element (Jamali, 2019). These methods require a large number of computational nodes to achieve the desired accuracy. Spectral and quasi spectral methods which are developing in recent years are able to calculate the solution with higher accuracy than analytical and numerical methods. In this research, solving the pollution equations using Chebyshev spectral method and Chebyshev spectral method is studied. The results of this study will be compared with analytical solution in different boundary conditions.

Method

Pollution simulation was conducted for two scenarios: continuous injection (Eq. 1) and stepwise injection. The stepwise injection included two cases. In the first case, the initial concentration $\bar{c}_1$ is uniform across all points (Eq. 2), and the upstream boundary pollution input $\bar{c}_0=0$ is terminated (Eq. 3). In the second case, at time $t=0$, the pollution input $\bar{c}_0$ at the upstream boundary is terminated, and at time t_1 , pollution with concentration $\bar{c}_1$ is introduced at the upstream boundary, which is then terminated at time t_2 (Table 1).

$$\begin{aligned} \text{B.C. } \bar{c}(0,t) &= \bar{c}_0 \quad 0 \leq t < \infty \\ \text{I.C. } \bar{c}(\bar{x},t) &= 0 \quad 0 \leq \bar{x} < \infty \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{I.C. : } \bar{c}(x,0) = \bar{c}_1 \quad (2)$$

$$\text{B.C. (Upstream): } \begin{cases} \bar{c}_0 & 0 < t \leq t_0 \\ & \& 0 > t_0 \end{cases} \quad (3)$$

Table 1. Flow and pollutant characteristics with a time-stepped pattern (Meshdgarmeh et al., 2013)

u(m/s)	$\bar{D}_x$ (m ² /s)	$\bar{k}$ (1/s)	t_1 (s)	t_2 (s)	T(hr)	$\bar{c}_1$ (kg/m ³)	$\bar{c}_0$ (kg/m ³)
0.3	0.3	0.00001	1000	3600	5	0.5	0.5

Results

The results obtained from the advection - diffusion - reaction equation for the first case of step injection using spectral and super spectral Chebyshev methods compared to the analytical solution of Van Genuchten et al (1982) indicate that over time, the maximum pollution decreases due to the presence of the reaction term. In this case of pollutant injection, both numerical methods have the same accuracy in predicting the amount of pollution (Figures 1 and 2).

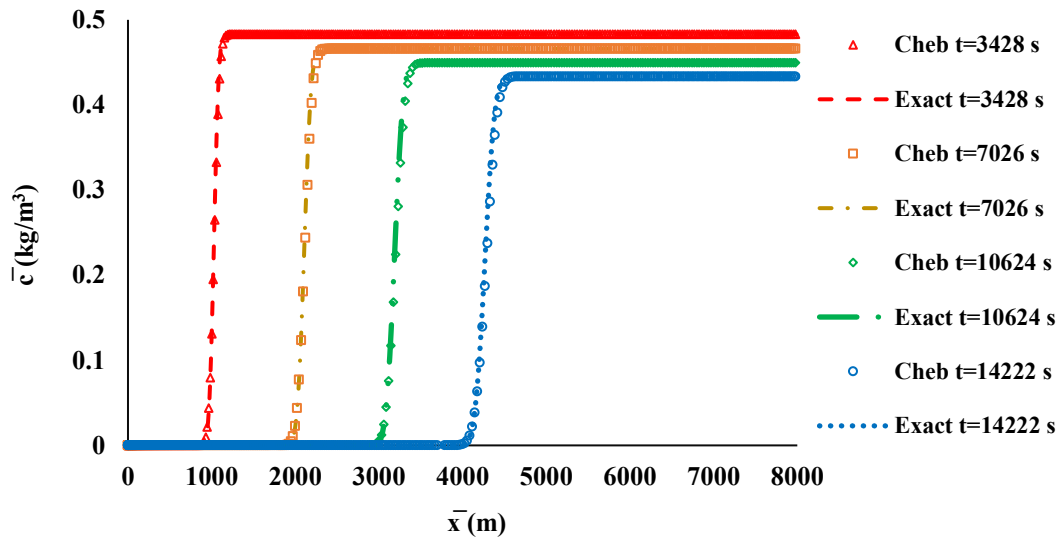


Figure 1. Comparison of the spectral Chebyshev method with the solution of Van Genuchten and Alves (1982) for step injection (Case 1).

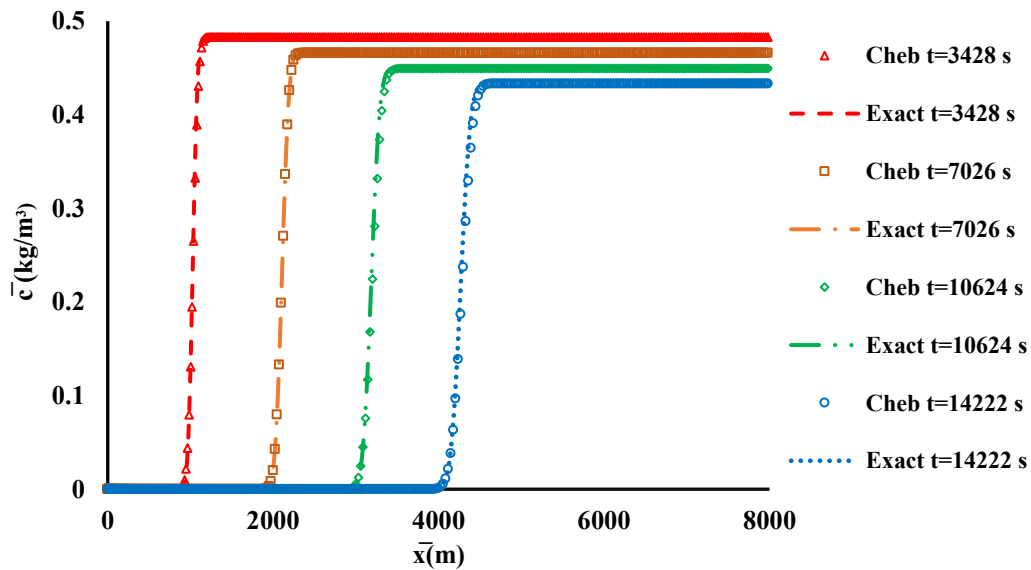


Figure 2. Comparison of the super spectral Chebyshev method with the solution of Van Genuchten and Alves (1982) for step injection (Case 1).

The results obtained from solving the advection - diffusion - reaction equation for the second case of step injection using the spectral and super-spectral Chebyshev methods, compared to the analytical solution at different times, show that both spectral methods have the same accuracy in calculating the concentration of pollutants. Therefore, it can be concluded that the spectral and super-spectral Chebyshev methods have equal precision in solving the advection-diffusion - reaction equation (Figures 3 & 4); however, the execution speed of the spectral Chebyshev method is greater than that of the super-spectral Chebyshev method.

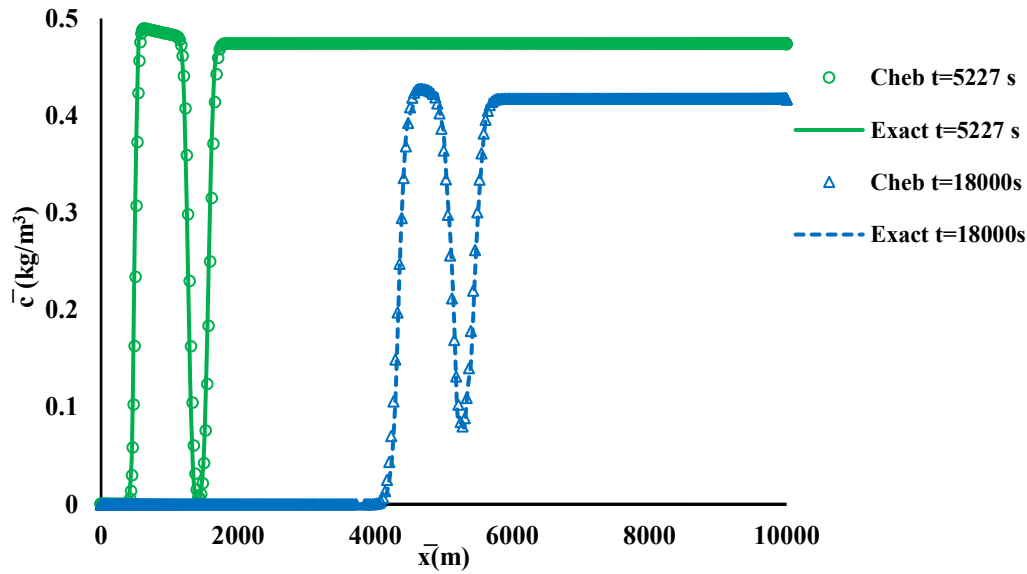


Figure 3. Comparison of the spectral Chebyshev method with the solution of Van Genuchten and Alves (1982) for step injection (Case 2).

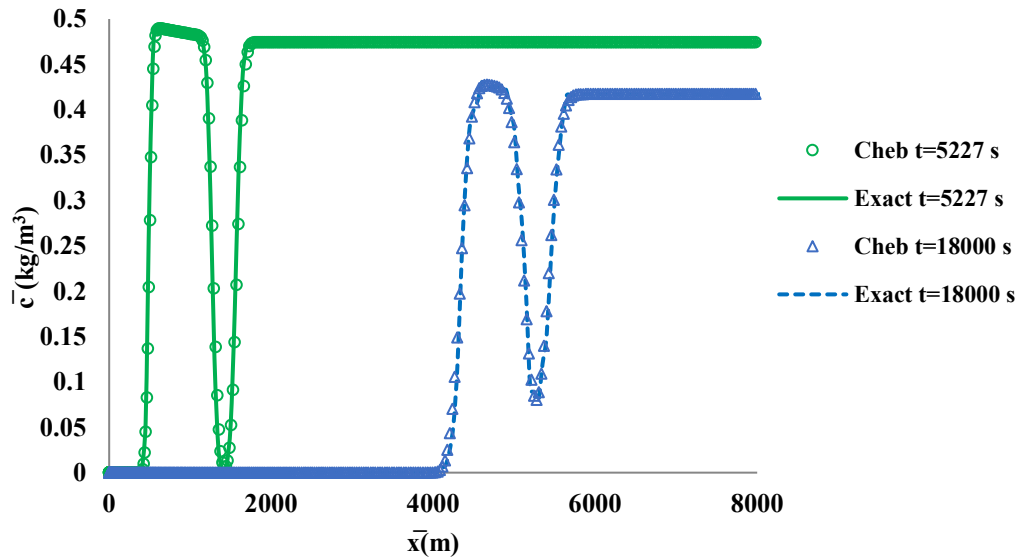


Figure 4. Comparison of the super spectral Chebyshev method with the solution of Van Genuchten and Alves (1982) for step injection (Case 2).

Conclusions

In this research, the accuracy of the Chebyshev spectral method and the Chebyshev super viscosity method was examined for solving pollution equations in two scenarios: continuous and stepwise pollutant injection, compared to analytical solutions. The results of these two methods in solving the advection equation indicated that as the number of points increased, the numerical results approached the analytical solution, and at the same number of points, the

super viscosity Chebyshev method exhibited higher accuracy in calculating pollutant concentration. However, none of the graphs fully aligned with the analytical results.

The mentioned methods were employed to solve advection -diffusion and advection -diffusion-reaction equations under stepwise injection and were compared with analytical results. The super viscosity Chebyshev method demonstrated higher accuracy than the standard Chebyshev method in solving the advection -diffusion equation at the same number of points. The results from this method were in complete agreement with the analytical results. Additionally, both methods yielded similar results for solving the advection -diffusion-reaction equation, showing high accuracy compared to the analytical solution. However, due to a greater operations computational, the super viscosity Chebyshev method had a lower execution speed than the standard Chebyshev method. The Chebyshev spectral methods with high accuracy in solving the pollution equations, the number of points required for them is independent of the length of the river. Thus, at a short length, the number of points required is required in a channel or river with a large length.

Author Contributions

All authors contributed equally to the conceptualization of the article and writing of the original and subsequent drafts.

Data Availability Statement

Data available on request from the authors.

Acknowledgements

The authors would like to thank all participants in the present study.

Ethical Considerations

The authors avoided data fabrication, falsification, plagiarism, and misconduct.

Funding

This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Conflict of Interest

The authors declare no conflict of interest



حل معادلات آلودگی با روش ویسکوزیته فوق طیفی چبیشف

لادن روشنائی^۱، و الهام درویشی^۲

۱. گروه علوم و مهندسی آب، پردیس کشاورزی و منابع طبیعی، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران. l.roshanayi@razi.ac.ir

۲. نویسنده مسئول، گروه علوم و مهندسی آب، پردیس کشاورزی و منابع طبیعی، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران. e.darvishi@razi.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

هدف: هدف از این پژوهش، حل معادلات آلودگی با استفاده از روش طیفی چبیشف و روش ویسکوزیته فوق طیفی چبیشف است.

نوع مقاله:

مقاله پژوهشی

روش پژوهش: روش های طیفی و شبه طیفی که در سال های اخیر در حال توسعه هستند با استفاده از تعداد گره و زمان کمتر قادر به محاسبه جواب با دقت بالاتر نسبت به روش های تحلیلی و عددی هستند. این روش ها تاکنون برای حل معادلات آلودگی بررسی نشده است. در این پژوهش، حل معادلات آلودگی با استفاده از روش طیفی چبیشف و روش ویسکوزیته فوق طیفی چبیشف مورد بررسی قرار می گیرد. نتایج این روش ها با حل تحلیلی در شرایط مرزی مختلف مقایسه خواهد شد.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۱/۱۷

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۰۴/۰۸

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۵/۰۹

تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۰۷/۰۱

کلیدواژه ها:

آلودگی،

انتقال - پخش - واکنش،

روش طیفی،

ویسکوزیته فوق طیفی.

یافته ها: در این پژوهش دقت روش طیفی چبیشف و روش ویسکوزیته فوق طیفی چبیشف برای حل معادلات آلودگی در دو حالت تزریق پیوسته و پله ای آلاینده در مقایسه با حل تحلیلی بررسی شد. نتایج این دو روش در حل معادله انتقال نشان داد که با افزایش تعداد نقاط نتایج عددی به حل تحلیلی نزدیک تر و در تعداد نقاط یکسان روش فوق طیفی ویسکوزیته چبیشف درستی بالاتری در محاسبه غلظت آلودگی دارد. اما نمودار هیچ یک بر نتایج تحلیلی منطبق نیست. روش های ذکر شده برای حل معادلات انتقال - پخش و انتقال - پخش - واکنش در تزریق پله ای به کار رفت و با نتایج تحلیلی مقایسه شد. روش فوق طیفی چبیشف با تعداد نقاط یکسان درستی بالاتری را نسبت به روش طیفی چبیشف در حل معادله انتقال - پخش دارد. نتایج این روش بر نتایج تحلیلی کاملاً منطبق هستند. همچنین هر دو روش نتایج یکسانی برای حل معادله انتقال - پخش - واکنش دارند که درستی بالایی در مقایسه با حل تحلیلی دارند. اما روش فوق طیفی چبیشف به دلیل انجام حجم عملیات بیشتر نسبت به روش طیفی چبیشف، سرعت اجرای کمتری دارد.

نتیجه گیری: نتایج این پژوهش نشان داد که روش های طیفی چبیشف با وجود دقت بالا در حل معادلات آلودگی، تعداد نقاط لازم برای آنها مستقل از طول رودخانه هستند؛ بنابراین در یک طول کوتاه همان تعداد نقاط لازم است که در یک کانال یا رودخانه با طول زیاد لازم است.

استناد: روشنائی، لادن؛ و درویشی، الهام. (۱۴۰۴). حل معادله آلودگی با روش ویسکوزیته فوق طیفی چبیشف. *فناوری های پیشرفته در بهره وری آب*، ۵ (۳)، ۷۵-۹۱.

<http://doi.org/10.22126/atwe.2025.12133.1167>



© نویسندگان

ناشر: دانشگاه رازی.

مقدمه

آب، این مایع حیات بخش، شریان اصلی تمدن ها و بستری برای شکل گیری و تداوم حیات در کره زمین است. منابع آبی، به ویژه رودخانه ها، به عنوان مهم ترین تأمین کنندگان آب شیرین، نقش بی بدیلی در توسعه جوامع بشری، رونق کشاورزی و صنعت، و حفظ تعادل اکولوژیکی ایفا می کنند (گلیک پیت^۱، ۲۰۰۳). رودخانه ها نه تنها منبع اصلی آب شیرین برای مصارف شرب، کشاورزی و صنعت هستند، بلکه زیستگاه های مهمی برای تنوع زیستی محسوب می شوند و در تنظیم چرخه های هیدرولوژیکی و آب و هوایی نقش دارند. امروزه مسئله انتقال آلودگی در رودخانه ها یکی از بزرگ ترین چالش های زیست محیطی به شمار می آید و تأثیرات عمیقی بر اکوسیستم های آبی و سلامت عمومی دارد (کیلیک^۲، ۲۰۲۱). از دلایل اصلی آلودگی آب ها، می توان به آلاینده ها اشاره کرد. آلاینده ها شامل دو دسته منابع نقطه ای و منابع غیر نقطه ای هستند. ورود آلاینده ها به منابع آبی، چه از طریق منابع نقطه ای (مانند خروجی فاضلاب های صنعتی و شهری) و چه از طریق منابع غیر نقطه ای (مانند رواناب های کشاورزی و شهری)، منجر به کاهش کیفیت آب، تخریب زیستگاه های آبی و اختلال در چرخه های طبیعی می شود (کارپنتر و همکاران^۳، ۱۹۹۸). در دهه های اخیر، با افزایش جمعیت، توسعه صنعتی و کشاورزی، و تغییرات اقلیمی، بار آلاینده ها در منابع آبی به طور چشمگیری افزایش یافته و پیامدهای منفی آن به وضوح قابل مشاهده است؛ لذا، شناسایی منابع آلاینده، ارزیابی اثرات آنها و ارائه راهکارهای مناسب برای کنترل و کاهش آلودگی آب، از اهمیت بسزایی برخوردار است.

تزریق آلاینده های نقطه ای نیز به دو شکل آنی (لحظه ای) و پیوسته است (آژدان، ۱۳۹۷). تزریق آنی (مانند رهاسازی ناگهانی مواد آلاینده در اثر حوادث صنعتی) و تزریق پیوسته (مانند نشت تدریجی آلاینده ها از مناطق کشاورزی یا محل های دفن زباله)، هر دو نوع تزریق، اثرات قابل توجهی بر کیفیت آب، سلامت اکوسیستم های آبی و بهداشت عمومی دارند (لاپورث^۴، ۲۰۱۲). تزریق آنی اغلب منجر به افزایش سریع غلظت آلاینده ها و ایجاد شرایط بحرانی می شود. درحالی که تزریق پیوسته، به مرور زمان باعث تجمع آلاینده ها و بروز اثرات بلندمدت می گردد. بررسی و مدیریت هر دو نوع تزریق برای حفاظت از منابع آبی ضروری است. حرکت مولکولی آب و همچنین سرعت غیر یکنواخت جریان سبب می شوند که زمانی که آلودگی وارد جریان شد، با آن همراه شود. معادله انتقال - پخش^۵، معادله حاکم بر جریان در شرایط آلودگی است که برای شبیه سازی جریان و انتشار آلودگی کاربرد دارد. این معادله از نوع معادلات دیفرانسیل سهموی غیر همگن، خطی و مرتبه دوم^۶ است و از ترکیب معادله پیوستگی و قانون اول فیک^۷ به دست آمده و دارای کاربردهای وسیعی در علوم آب و جو، انتقال حرارت و علوم مهندسی است (کاتو و همکاران^۸، ۲۰۲۳).

روش های طیفی و شبه طیفی که در سال های اخیر در حال توسعه هستند با استفاده از تعداد گره و زمان کمتر قادر به محاسبه جواب بادقت بالاتر نسبت به روش های تحلیلی و عددی هستند. این روش ها تاکنون برای حل معادلات آلودگی بررسی نشده است.

1. Gleick Peter

2. Kilic

3. Carpenter et al

4. Lapworth

5. Advection- Diffusion- Reaction Equation

6. Non- homogeneous, linear, second- order partial differential equations

7. Fick 's first law

8. Kato et al

در این پژوهش، حل معادلات آلودگی با استفاده از روش طیفی چیشف و روش ویسکوزیته فوق طیفی چیشف مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج این روش‌ها با حل تحلیلی در شرایط مرزی مختلف مقایسه خواهد شد.

ادبیات موضوع و پیشینه پژوهش

روش‌های تحلیلی و عددی مختلفی برای حل معادله حاکم بر پدیده آلودگی به کار رفته است. راه حل تحلیلی و یا عددی معادله می‌تواند در جهت توضیح نحوه توزیع غلظت ماده آلاینده و رفتار آن در یک محیط باز مانند هوا، رودخانه و محیط متخلخل و اثر واقع شود. در رابطه با پژوهش حاضر، مطالعاتی در داخل و خارج از کشور صورت گرفته است که در ادامه تعدادی از این مطالعات ارائه شده است.

۱. مطالعات داخلی

فردادی شیل سر و همکاران (۱۴۰۰) در تحقیقی به بررسی حل تحلیلی معادله انتقال و واکنش در سیستم‌های آبی پرداختند و روش‌های مختلف حل این معادله را تحلیل کردند. آن‌ها نشان دادند که حل تحلیلی موجود در این پژوهش می‌تواند به عنوان ابزاری جهت صحت‌سنجی و اعتبارسنجی حل‌های عددی و سایر حل‌های تحلیلی برای ضرایب متغیر معادله مورد استفاده قرار گیرد. فتحی و همکاران (۱۳۹۳) در تحقیق خود به حل عددی معادله انتقال - پخش - واکنش با استفاده از روش‌های عددی پیشرفته پرداخته و نتایج آن‌ها نشان‌دهنده تأثیر پارامترهای مختلف بر روی نتایج شبیه‌سازی بوده است. این مطالعه اهمیت انتخاب روش مناسب برای حل این معادلات را برجسته کرده است.

۲. مطالعات خارجی

یاداو و همکاران^۱ (۲۰۱۰) معادله انتقال و پخش همراه با ترم زوال را به صورت تحلیلی حل و تعیین کردند که یک آلودگی مشخص بعد از گذشت چه زمان و مکانی زوال می‌یابد. کومار^۲ (۲۰۲۰) با استفاده از تبدیل لاپلاس، موفق به یافتن راه‌حل‌های تحلیلی برای معادله آلودگی در آب‌های زیرزمینی شدند و نتایج نشان داد که این روش می‌تواند به سادگی شرایط اولیه و مرزی پیچیده را مدیریت کند. کومار و همکاران (۲۰۲۱) در تحقیق خود نشان دادند که روش حجم محدود در شبیه‌سازی انتقال آلاینده‌ها در آب‌های زیرزمینی می‌تواند به دقت بالایی برسد و نسبت به روش‌های دیگر، مزایای بیشتری از نظر حفظ تعادل جرم دارد. در تحقیقی دیگر چن و همکاران^۳ (۲۰۱۹) به بررسی کاربرد روش حجم محدود در شبیه‌سازی انتقال آلاینده‌ها در آب‌های زیرزمینی پرداخته و مزایای آن را نسبت به روش‌های قدیمی تر بیان کرده‌اند. محمود و همکاران^۴ (۲۰۲۲) به ارائه راه‌حل‌های دقیق برای معادله پخش - واکنش با استفاده از روش‌های خاص ریاضی پرداخته است. نتایج نشان می‌دهد که این راه‌حل‌ها می‌توانند برای شبیه‌سازی رفتار سیستم‌های بیولوژیکی مفید باشند.

1. Yadav et al

2. Kumar

3. Chen et al

4. Mahmoud et al

نویی^۱ (۱۹۸۷) روش های عددی مانند روش تفاضل محدود^۲ و روش حجم محدود^۳ برای حل معادله انتقال - پخش - واکنش را مورد بررسی قرار دادند. نتایج نشان داد که روش حجم محدود دقت بالاتری نسبت به روش تفاضل محدود در شرایط مرزی پیچیده دارد.

جمالی (۲۰۱۹) مقایسه ای بین روش های مختلف عددی برای حل معادله پخش - واکنش انجام داده اند. نتایج نشان داد که روش المان محدود^۴ بهترین دقت را در شبیه سازی سیستم های غیرخطی فراهم می کند، اما زمان محاسباتی آن بیشتر از سایر روش ها است.

باروس^۵ (۲۰۱۹) به بررسی رویکردهای ترکیبی برای حل معادله انتقال - پخش - واکنش پرداختند. نتایج نشان می دهد که ترکیب روش های تحلیلی و عددی می تواند دقت بالاتری را ارائه دهد و زمان محاسباتی را کاهش دهد.

روش پژوهش

۱. معادلات ریاضی

روابط حاکم بر پدیده آلودگی در حالت یک بعدی شامل معادلات انتقال (معادله (۱))، انتقال - پخش (معادله (۲)) و انتقال - پخش - واکنش (معادله (۳)) هستند (وان جنکتن و همکاران^۶، ۱۹۸۲؛ چاپرا^۷، ۱۹۹۷).

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{x}} = \bar{D}_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{x}^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{x}} + \bar{k} \bar{c} = \bar{D}_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{x}^2} \quad (3)$$

در این معادلات $\bar{c}$ برحسب میلی گرم بر لیتر مقدار غلظت آلاینده در زمان t (ثانیه) و مکان $\bar{x}$ (متر)، u سرعت متوسط جریان برحسب متر بر ثانیه، $\bar{D}_x$ ضریب پخش طولی برحسب مترمربع بر ثانیه و $\bar{k}$ ثابت نرخ واکنش برحسب معکوس ثانیه است

۲. روش ویسکوزیته طیفی چیشف

در روش طیفی چیشف بسط سری برای یک تابع $u(x, \tau)$ در دامنه $[-1, 1]$ به صورت زیر تقریب زده می شود (روگر پیرت^۸، ۲۰۰۲).

$$U_N = \sum_{k=0}^N U_k(\tau) T_k(x) \quad (4)$$

1. Noye
2. Finite Difference Method
3. Finite Volume Method
4. Finite Element Method
5. Barros
6. Van Genuchten et al
7. Chapra
8. Roger Peyert

که $U_k(\tau)$ ضرایب طیفی سری وابسته به زمان $T_k(x)$ چندجمله‌ای چیشف از درجه k است و باتوجه به $x \in [-1, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$T_k = \cos(k \cos^{-1} x) U_N = \sum_{k=0}^N U_k(\tau) T_k(x) \quad (5)$$

و x نقاط درون‌یاب که به نقاط چیشف معروف هستند:

$$x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right), \quad i=0, 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

و با استفاده از رابطه معکوس، ضرایب را به صورت معادله (۷) می‌توان محاسبه کرد:

$$u_k(\tau) = \frac{2}{N c_k} \sum_{i=0}^N \frac{U(x_i, \tau)_N}{c_i} \cos\left(\frac{k i \pi}{N}\right) \quad (7)$$

که c_k و c_i برای k در بازه $i=0, 1, 2, \dots, N-1$ برابر یک و $c_0=c_N=2$ است. مشتق مکانی مرتبه n ام بسط سری تابع $u(x, \tau)$ در نقاط x_i با استفاده از مشتق تحلیلی چندجمله‌ای لاگرانژ محاسبه می‌شود و اگر تابع به صورت رابطه (۸) نوشته شود، D^n یک ماتریس $(N+1) \times (N+1)$ خواهد بود که $D^{(l)} = D = d_{ik}$ و از رابطه (۹) به دست می‌آید.

$$u^n = D^n u \quad (8)$$

$$d_{ik} = \begin{cases} \frac{c_i(-1)^{(i+k)}}{c_k(x_k - x_i)} & i \neq k \\ \frac{x_i}{2(1-x_i^2)} & 1 \leq i=k \leq N-1 \\ \frac{-2N^2+1}{6} & i=k=0 \\ \frac{2N^2+1}{6} & i=k=N \end{cases} \quad (9)$$

با استفاده از این ماتریس به جای محاسبه ضرایب سری، جملات u در هر مکان محاسبه خواهد شد. در صورت وجود تغییرات ناگهانی در جواب‌های روش طیفی چیشف، به سمت جواب درست همگرا نخواهد بود. در این حالت عبارت ویسکوزیته طیفی پایداری تقریب و اطمینان از همگرایی آن به سری اضافه شده است (تادمر^۱، ۱۹۸۹). معادله چندجمله‌ای چیشف با عبارت ویسکوزیته به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$-CN \sum_{k=0}^N \left(\frac{k}{N}\right)^{2S} u_k(t) T_k(x) \quad (10)$$

در این معادله C و S دو مقدار در روش ویسکوزیته فوق طیفی هستند (چن و همکاران، ۲۰۱۳). ضریب C باتوجه به عبارت $N^{1/2} \leq \theta \leq N^{1/2}$ تعیین می‌شود و برای ضریب S باید $S \leq \ln(N)$ باشد. طبق نتایج آنها چنانچه مقدار $\ln(N)$ برای S و $N^{1/2}$ برای C انتخاب شود نتایج خوبی به دست خواهد آمد. از آنجایی که جملات سری چیشف در بازه $[-1, 1]$ قرار دارند. لازم

است متغیرهای معادلات دیفرانسیل در این بازه قرار گیرد. به همین دلیل با ضرب معادلات (۱)، (۲) و (۳) $\frac{L}{2u\bar{c}_0}$ و تعریف پارامترهای بدون بعد به صورت زیر معادلات به صورت معادلات (۱۱) تا (۱۳) بازنویسی می شوند.

$$x = \frac{2}{L}\bar{x} - 1, \tau = \frac{tu}{L}, c = \frac{\bar{c}}{\bar{c}_0}, k = \frac{\bar{k}L}{2u}, D_x = \frac{\bar{D}_x}{u\frac{L}{2}} \quad (11)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + \frac{\partial c}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (13)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + \frac{\partial c}{\partial x} + kc = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (14)$$

۳. حالت های مختلف شبیه سازی آلودگی

الف) تزریق پیوسته

تزریق پیوسته آلودگی به معنای ورود مداوم و مستمر مواد آلاینده به آب رودخانه است. این نوع آلودگی معمولاً ناشی از منابع ثابت و پایدار است که به طور دائم یا به صورت دوره ای به آب وارد می شوند. با فرض ثابت بودن سرعت جریان و پایداری پروفیل جریان، جواب تحلیلی معادله (۱) (انتقال) در حالت تزریق پیوسته بر مبنای تابع هویساید است (شارما^۱، ۲۰۱۸).

$$\bar{c}(\bar{x}, t) = \bar{c}_0 H(ut - \bar{x} + x_0) \quad H(ut - \bar{x} + x_0) = \begin{cases} 1 & ut \geq \bar{x} - x_0 \\ 0 & ut < \bar{x} - x_0 \end{cases} \quad (15)$$

که در آن H تابع پله ای هویساید، $\bar{x}$ طول مسیر، x_0 فاصله از محل تخلیه آلاینده، u سرعت، t زمان و $\bar{c}_0$ غلظت آلودگی در محل تزریق است. همچنین پاسخ معادله (۲) (انتقال - پخش) در حالت تزریق پیوسته، تحت شرایط مرزی^۲ (B.C.) و اولیه^۳ (I.C.) زیر:

$$B.C. \bar{c}(0, t) = \bar{c}_0 \quad 0 \leq t < \infty$$

$$I.C. \bar{c}(\bar{x}, t) = 0 \quad 0 \leq \bar{x} < \infty$$

چنین است:

$$\bar{c}(\bar{x}, t) = \left[\frac{\bar{c}_0}{2} \exp\left(\frac{u\bar{x}}{E}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\bar{x} + ut}{\sqrt{4Et}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{\bar{x} - ut}{\sqrt{4Et}}\right) \right] \quad (16)$$

و در این رابطه، E ضریب پخش طولی است (محمودیان شوشتری، ۱۳۸۹).

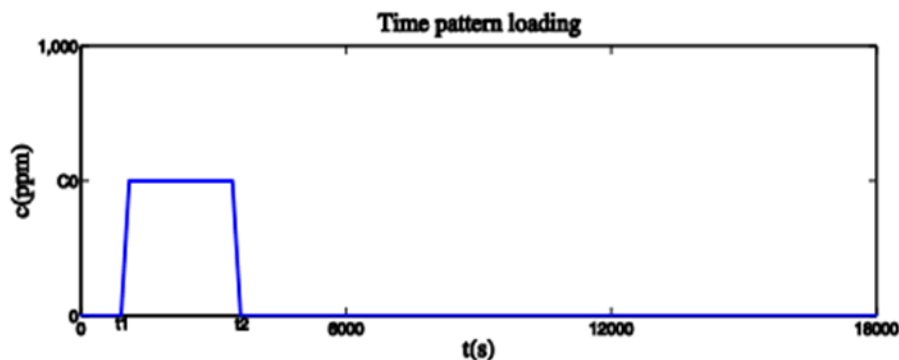
(ب) تزریق پله‌ای

تزریق پله‌ای آلودگی به صورت مرحله‌ای و در زمان‌های مشخص، با مقادیر کنترل شده و برای یک بازه مشخص زمانی وارد محیط می‌شود. در این مقاله دو حالت تزریق پله‌ای بررسی شده است که توسط مشاهد گرمه و همکاران (۱۳۹۲) ارائه شده است. رابطه ۱۶ شرایط اولیه و رابطه ۱۷ و ۱۸ به ترتیب شرایط مرزی بالادست و پایین‌دست را برای حالت اول و شکل (۱) شرایط مرزی حالت دوم را نشان می‌دهد.

$$I.C.: \bar{c}(x, 0) = \bar{c}_1 \quad (16)$$

$$B.C. (Upstream): \begin{cases} \bar{c}_0 & 0 < t \leq t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases} \quad (17)$$

$$B.C. (Downstream): \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}(\infty, t) = 0 \quad (18)$$



شکل ۱. فرم شماتیک الگوی تزریق پله‌ای (مشهد گرمه و همکاران ۱۳۹۲)

راه حل تحلیلی وان جنکتن (۱۹۸۲) برای معادله (۳) (انتقال - پخش - واکنش) در حالت تزریق پله‌ای به صورت رابطه (۱۹) خواهد بود.

$$\bar{c}(\bar{x}, t) = \begin{cases} \bar{c}_1 A(\bar{x}, t) + \bar{c}_0 B(\bar{x}, t) & 0 < t \leq t_0 \\ \bar{c}_1 A(\bar{x}, t) + \bar{c}_0 B(\bar{x}, t) - \bar{c}_0 B(\bar{x}, t - t_0) & t > t_0 \end{cases} \quad (19)$$

$$A(\bar{x}, t) = \exp(-\bar{k}t) \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\bar{x} - ut}{2(\bar{D}_x t)^{1/2}} \right) - \frac{1}{2} \exp \left(\frac{u\bar{x}}{\bar{D}_x} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{\bar{x} + ut}{2(\bar{D}_x t)^{1/2}} \right) \right] \quad (20)$$

$$B(\bar{x}, t) = \frac{1}{2} \exp \left(\frac{(u-V)\bar{x}}{2\bar{D}_x} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{\bar{x} - Vt}{2(\bar{D}_x t)^{1/2}} \right) + \frac{1}{2} \exp \left(\frac{(u+V)\bar{x}}{2\bar{D}_x} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{\bar{x} + Vt}{2(\bar{D}_x t)^{1/2}} \right) \quad (21)$$

$$V = u \left(1 + \frac{4\bar{k}\bar{D}}{u^2} \right)^{0.5} \quad (22)$$

یافته‌های پژوهش

به منظور ارزیابی روش طیفی چبیشف و روش ویسکوزیته فوق طیفی چبیشف، شبیه‌سازی برای دو مثال فرضی یکی در حالت تزریق پیوسته آلاینده و دیگری با در نظر گرفتن الگوی بارگذاری پله‌ای با فرض منبع آلاینده نقطه‌ای انجام و با نتایج حل تحلیلی مقایسه شده است.

۱. نتایج تزریق پیوسته

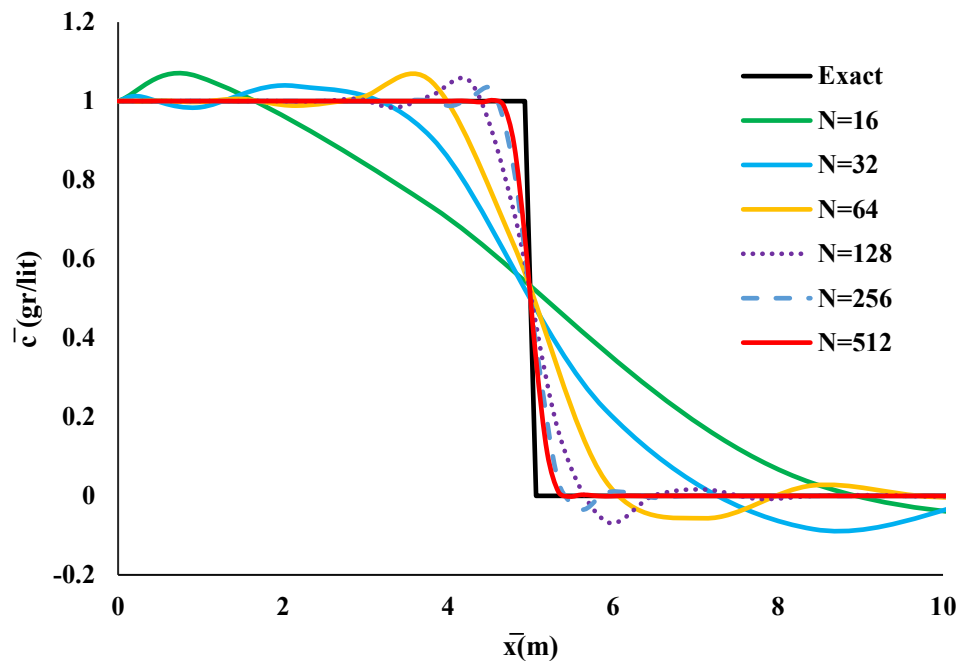
در حال تزریق پیوسته معادلات (۱) و (۲) با استفاده از شرایط اولیه و مرزی جدول (۱) حل و با حل تحلیلی مقایسه خواهد شد. در هنگام تزریق پیوسته معادلات آلودگی به روش طیفی چبیشف و روش ویسکوزیته فوق طیفی چبیشف حل شد.

جدول ۱. شرایط اولیه و مرزی در حالت تزریق پیوسته (فتاحی‌چقابی، ۱۳۹۱)

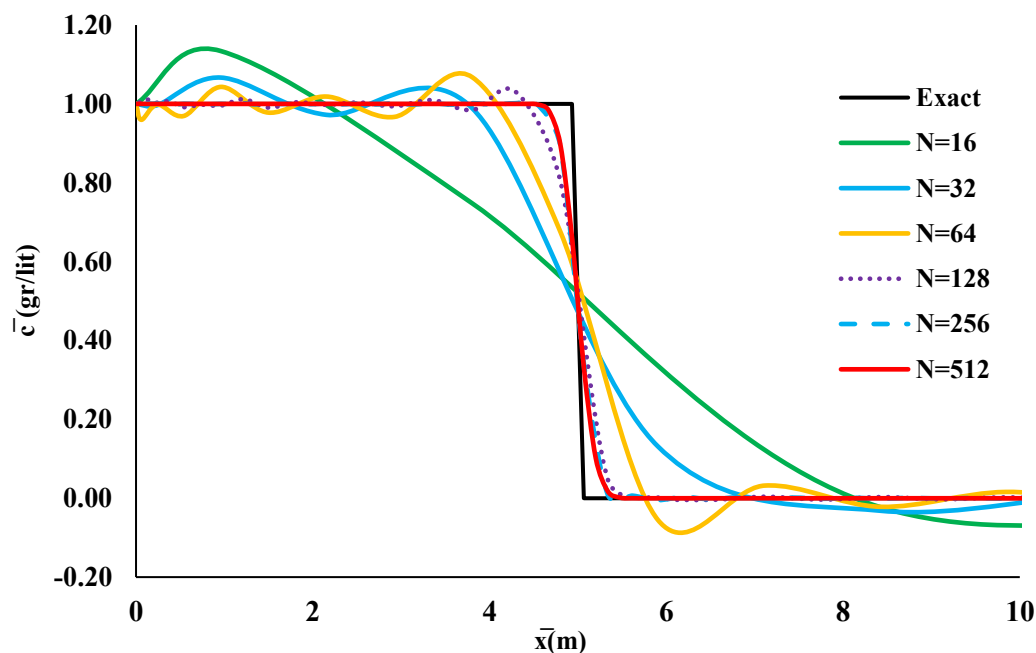
شرط اولیه	$\bar{c}(\infty, 0) = 0 \text{ gr/lit}$
شرط مرزی	$\bar{c}(1, t) = 1 \text{ gr/lit}$
سرعت	$u = 0.1 \text{ m/sec}$
ضریب پخش طولی	$\bar{D}_x = 0.01 \text{ m}^2/\text{sec}$

در ابتدا به منظور بررسی تأثیر تعداد نقاط، با گام زمانی 10^{-4} ثانیه برای تعداد نقاط ۱۶، ۳۲، ۶۴، ۱۲۸، ۲۵۶ و ۵۱۲ مقادیر آلودگی (معادله (۱)) در حالت تزریق پیوسته با روش طیفی چبیشف و ویسکوزیته فوق طیفی چبیشف محاسبه و نتایج به ترتیب در شکل‌های (۲) و (۳) آورده شده است.

با افزایش تعداد نقاط، نوسانات نمودار غلظت آلودگی در هر دو روش کاهش می‌یابد و به حل تحلیلی نزدیک می‌شود؛ با افزایش تعداد نقاط سرعت انجام محاسبات کاهش می‌یابد. مقایسه دو روش عددی نشان می‌دهد که در تعداد نقاط یکسان، نمودار روش فوق طیفی ویسکوزیته چبیشف اندازه نوسانات کوچک‌تری نسبت به روش طیفی چبیشف دارد. همچنین در روش فوق طیفی چبیشف نمودار برای تعداد نقاط ۲۵۶ و ۵۱۲ برهم منطبق است. بدین معنی که این روش با تعداد نقاط کمتر نسبت به روش طیفی چبیشف دقت مناسبی دارد. با انتخاب مناسب گام زمانی و تعداد نقاط می‌توان آنها را حذف کرد.

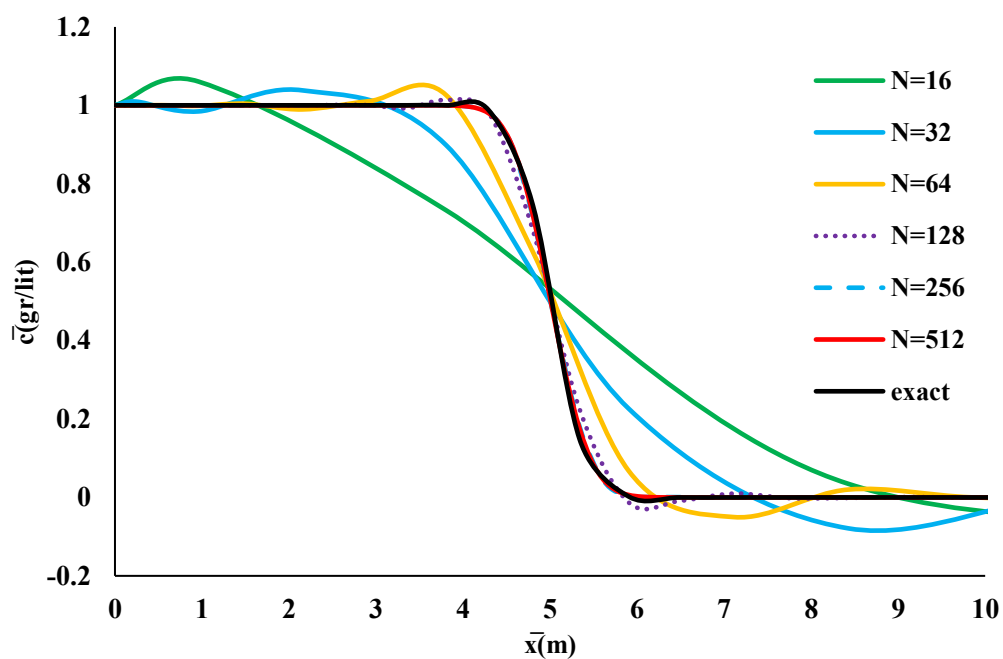


شکل ۲. آلودگی در حالت انتقال و تزریق پیوسته ماده آلاینده (مقایسه حل تحلیلی و روش طیفی چیشف)

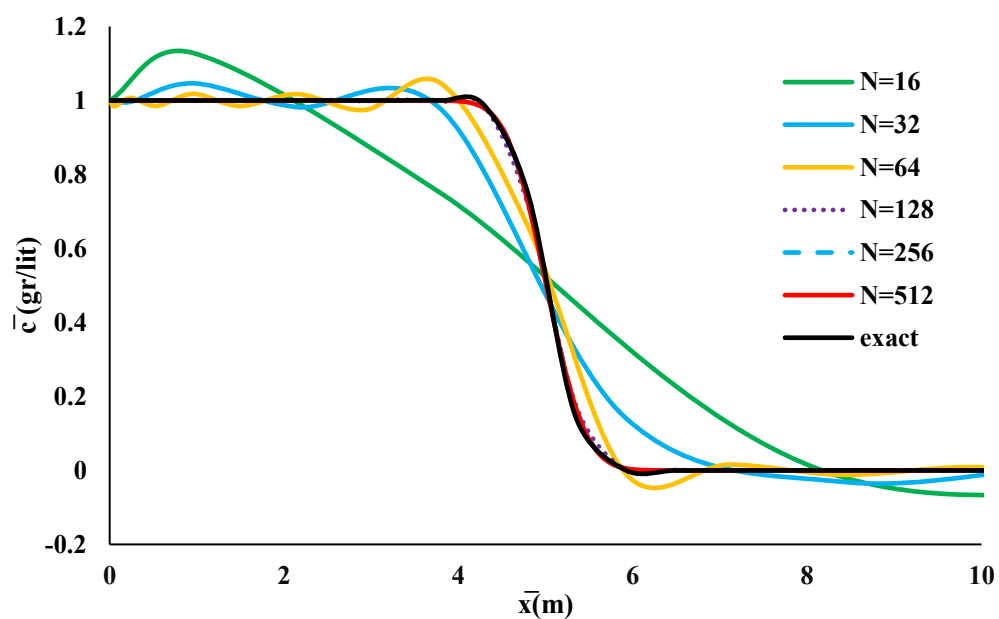


شکل ۳. آلودگی در حالت انتقال و تزریق پیوسته ماده آلاینده (مقایسه حل تحلیلی و روش ویسکوزیته فوق طیفی چیشف)

نتایج حل معادله (۲) به هر دو روش عددی در مقایسه با حل تحلیلی، برای داده‌های جدول (۱) در شکل (۴) و (۵) ارائه شده است. روش‌های طیفی و فوق طیفی چیشف برای حل معادله انتقال - پخش نیاز به تعداد نقاط کمتری دارند و در همه نمودارها نوسانات در مقایسه با نتایج معادله انتقال نوسانات کمتری وجود دارد. در این حالت نتایج روش ویسکوزیته فوق طیفی چیشف برای تعداد نقاط ۱۲۸، ۲۵۶ و ۵۱۲ و نتایج روش طیفی چیشف برای تعداد نقاط ۲۵۶ و ۵۱۲ بر هم منطبق هستند. همچنین هر دو روش عددی درستی بالاتری در حل معادله انتقال - پخش نسبت به حل معادله انتقال دارند.



شکل ۴. آلودگی در حالت انتقال - پخش و تزریق پیوسته ماده آلاینده (مقایسه حل تحلیلی و روش طیفی چیشف)



شکل ۵. آلودگی در حالت انتقال - پخش و تزریق پیوسته ماده آلاینده (مقایسه حل تحلیلی و روش ویسکوزیته فوق طیفی چیشف)

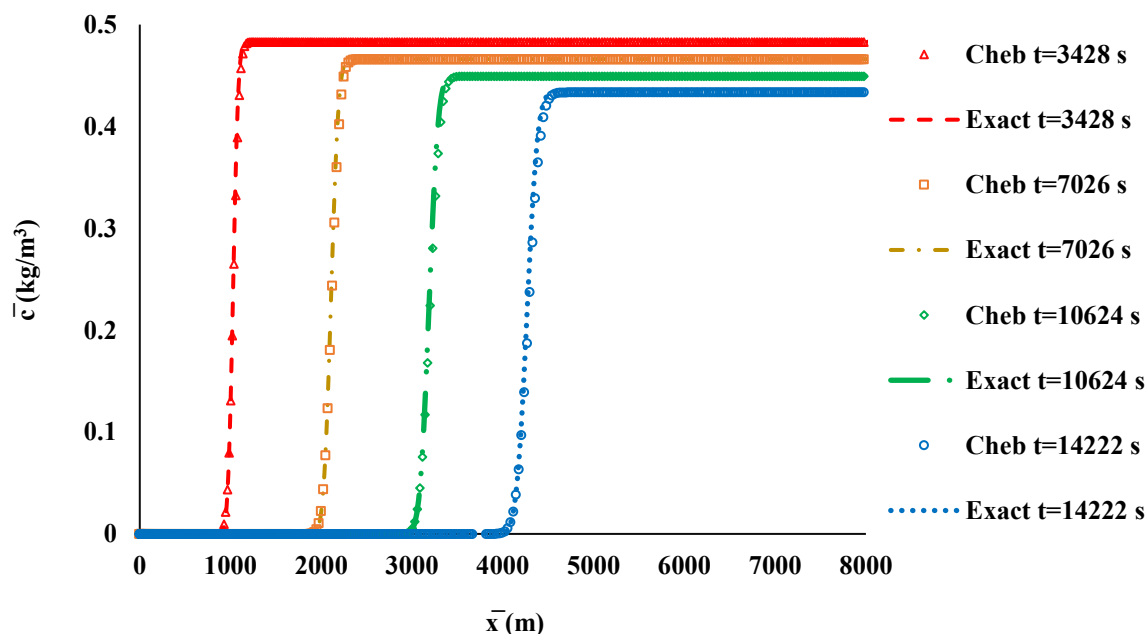
۲. نتایج تزریق پله‌ای

معادله انتقال - پخش - واکنش برای تزریق پله‌ای برای دو حالت به روش‌های ذکر شده حل شد. در این حالت به دلیل اضافه شدن برخی ترم‌ها به معادله (۳)، تعداد نقاط برای انجام محاسبات کمتر شد و به هنگام حل با روش طیفی چبیشف تعداد نقاط ۱۲۸ و با روش ویسکوزیته فوق طیفی چبیشف ۶۴ در نظر گرفته شد. شرایط اولیه و مرزی، حالت اول در روابط (۱۶) تا (۱۸) آمده است. مطابق جدول (۲)، در این حالت غلظت اولیه $\bar{c}_1$ در همه نقاط برابر است و در مرز بالادست آلودگی ورودی $\bar{c}_0=0$ قطع می‌شود. در حالت دوم در زمان $t=0$ آلودگی در مرز بالادست قطع و در زمان t_1 آلودگی با غلظت $\bar{c}_0$ در مرز بالادست وارد می‌شود و در زمان t_2 تزریق آلودگی قطع می‌شود که در جدول (۲) نشان داده شده است.

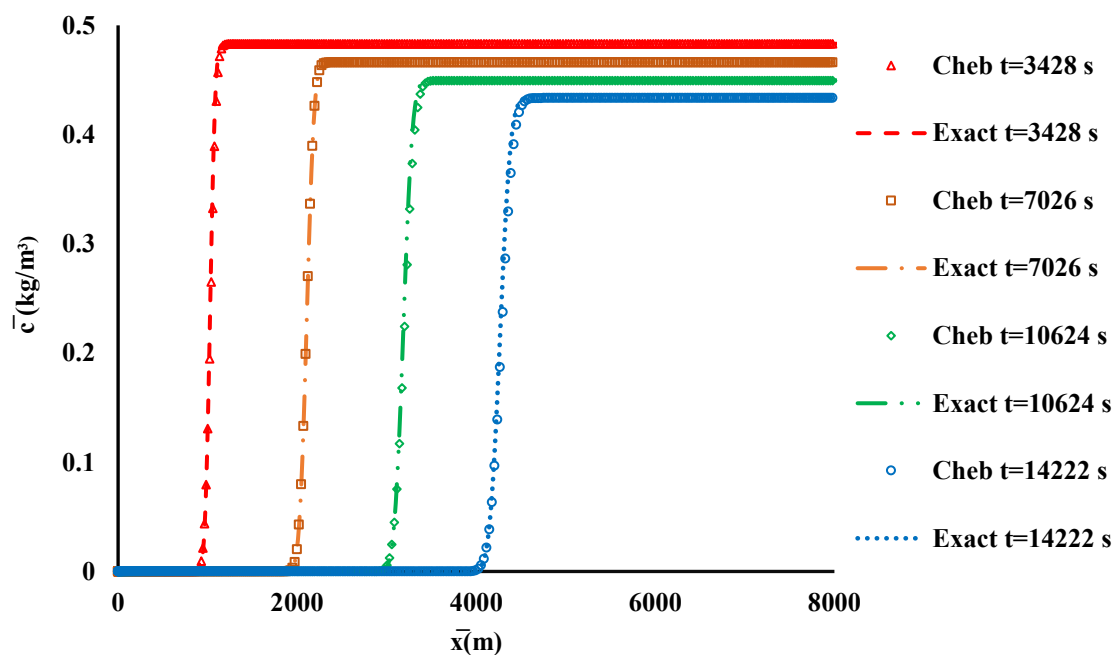
به منظور بررسی درستی روش‌های طیفی و فوق طیفی چبیشف در حل معادله انتقال - پخش - واکنش، مقایسه نتایج با حل تحلیلی وان جنکتن و همکاران (۱۹۸۲) رابطه (۱۹) انجام شده است. نتایج حالت اول تزریق پله‌ای در زمان‌های مختلف در شکل‌های (۶) و (۷) به ترتیب برای روش طیفی و فوق طیفی چبیشف آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با گذشت زمان حداکثر آلودگی به دلیل وجود جمله واکنش کاهش یافته است. در این حالت تزریق آلودگی هر دو روش عددی درستی یکسانی در پیش‌بینی مقدار آلودگی دارند. نتایج حالت دوم در شکل‌های (۸) و (۹) به ترتیب برای روش طیفی و فوق طیفی چبیشف در مقایسه با حل تحلیلی در زمان‌های مختلف ارائه شده است. هر دو روش طیفی دارای درستی یکسان در محاسبه غلظت آلودگی هستند؛ بنابراین می‌توان گفت که روش طیفی و فوق طیفی چبیشف برای حل معادله انتقال - پخش - واکنش دارای دقت یکسان هستند. اما سرعت اجرای روش طیفی چبیشف بیشتر از روش فوق طیفی چبیشف است.

جدول ۲. مشخصات جریان و آلاینده با الگوی زمانی پله‌ای (مشهدگره و همکاران ۱۳۹۲)

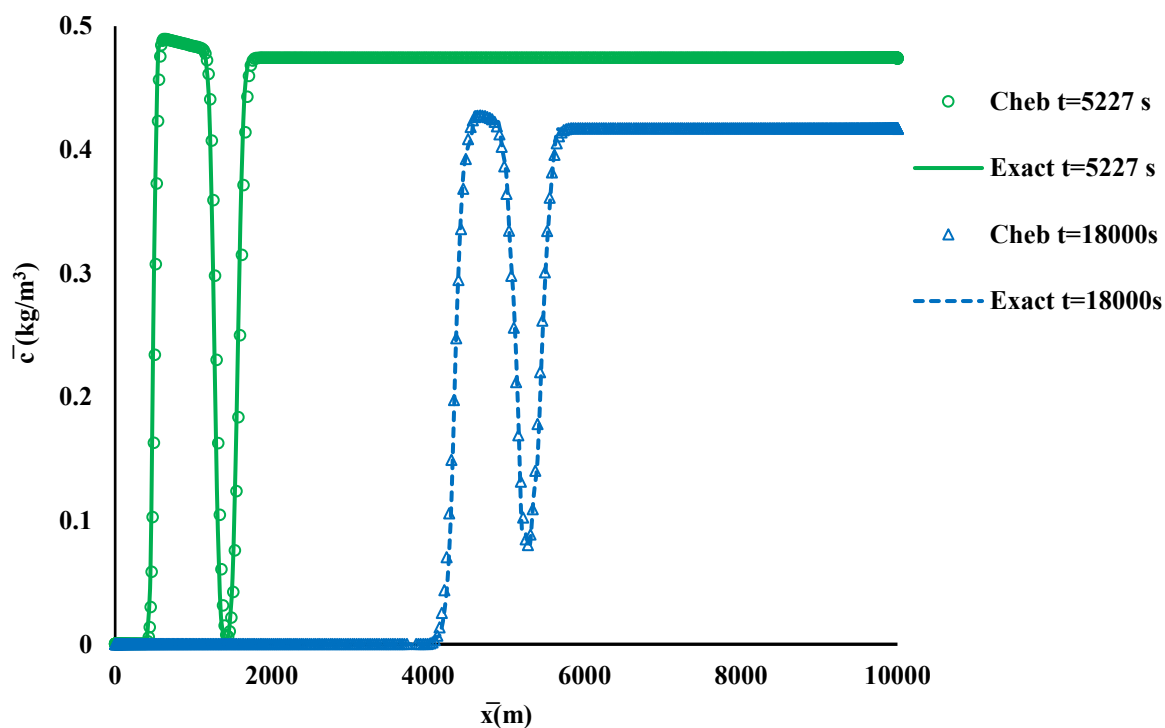
پارامتر	$u(m/s)$	$\bar{D}_x(m^2/s)$	$\bar{k}(1/s)$	$t_1(s)$	$t_2(s)$	$T(hr)$	$\bar{c}_1(kg/m^3)$	$\bar{c}_0(kg/m^3)$
مقدار	۰/۳	۰/۳	۰/۰۰۰۰۱	۱۰۰۰	۳۶۰۰	۵	۰/۵	۰/۵



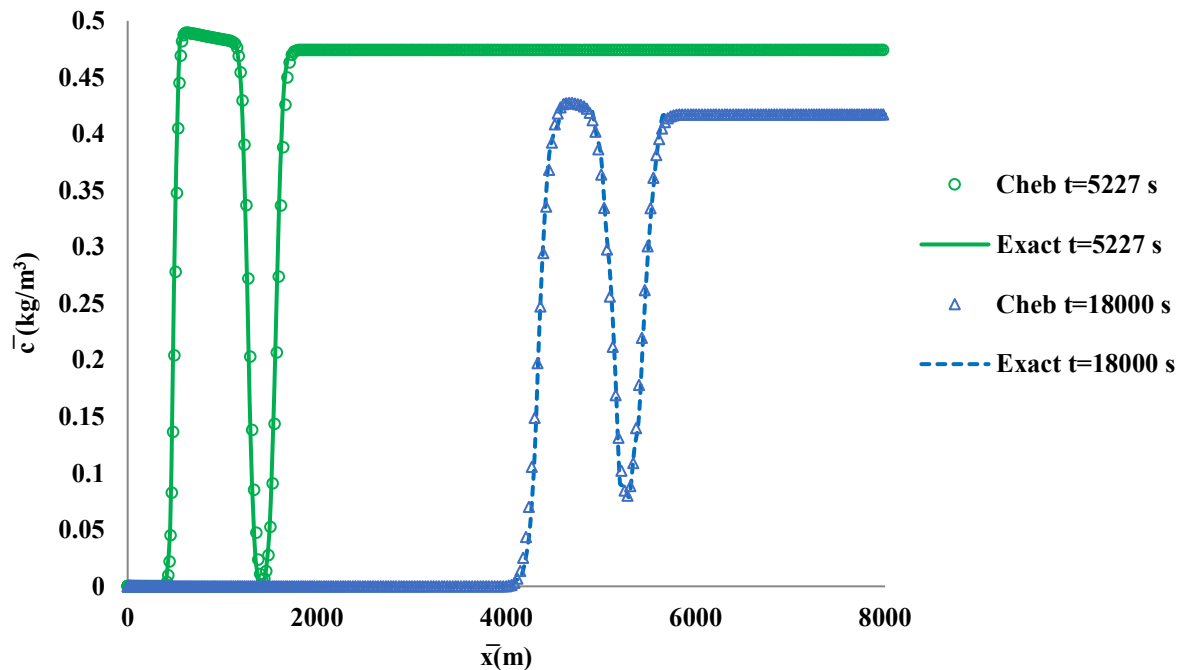
شکل ۶. مقایسه روش طیفی چبیشف با راه حل Van Genachten and Alves(1982) با بارگذاری پله‌ای (حالت اول)



شکل ۷. مقایسه روش ویسکوزیته فوق طیفی چبیشف با راه حل Van Genachten and Alves(1982) با بارگذاری پله‌ای (حالت اول)



شکل ۸. مقایسه روش طیفی چبیشف با راه حل Van Genachten and Alves(1982) بارگذاری پله‌ای (حالت دوم)



شکل ۹. مقایسه روش ویسکوزیته فوق طیفی چبیشف با راه حل Van Genachten and Alves(1982) بارگذاری پله‌ای (حالت دوم)

بحث

روش‌های طیفی و شبه طیفی که در سال‌های اخیر در حال توسعه هستند با استفاده از تعداد گره و زمان کمتر قادر به محاسبه جواب بادقت بالاتر نسبت به روش‌های تحلیلی و عددی هستند. در این پژوهش، حل معادلات آلودگی با استفاده از روش طیفی چبیشف و روش ویسکوزیته فوق طیفی چبیشف مورد بررسی قرار گرفت و نتایج این روش‌ها با حل تحلیلی در شرایط مرزی مختلف مقایسه شد.

نتیجه‌گیری

در این پژوهش دقت روش طیفی چبیشف و روش ویسکوزیته فوق طیفی چبیشف برای حل معادلات آلودگی در دو حالت تزریق پیوسته و پله‌ای آلاینده در مقایسه با حل تحلیلی بررسی شد. نتایج این دو روش در حل معادله انتقال نشان داد که با افزایش تعداد نقاط نتایج عددی به حل تحلیلی نزدیک‌تر و در تعداد نقاط یکسان روش فوق طیفی ویسکوزیته چبیشف درستی بالاتری در محاسبه غلظت آلودگی دارد. اما نمودار هیچ یک بر نتایج تحلیلی منطبق نیست. روش‌های ذکر شده برای حل معادلات انتقال - پخش و انتقال - پخش - واکنش در تزریق پله‌ای به کار رفت و با نتایج تحلیلی مقایسه شد. روش فوق طیفی چبیشف با تعداد نقاط یکسان درستی بالاتری را نسبت به روش طیفی چبیشف در حل معادله انتقال - پخش دارد. نتایج این روش بر نتایج تحلیلی کاملاً منطبق هستند. همچنین هر دو روش نتایج یکسانی برای حل معادله انتقال - پخش - واکنش دارند که درستی بالایی در مقایسه با حل تحلیلی دارند. اما روش فوق طیفی چبیشف به دلیل انجام حجم عملیات بیشتر نسبت به روش طیفی چبیشف، سرعت اجرای کمتری دارد.

روش های طیفی چیشف باوجود دقت بالا در حل معادلات آلودگی، تعداد نقاط لازم برای آنها مستقل از طول رودخانه هستند؛ بنابراین در یک طول کوتاه همان تعداد نقاط لازم است که در یک کانال یا رودخانه با طول زیاد لازم است. همچنین تشکیل ماتریس D در زبان های برنامه نویسی دیگر بسیار پیچیده است که استفاده از این روش ها را مشکل خواهد کرد. در این پژوهش معادله یک بعدی آلودگی به روش های طیفی حل شد که برنامه نویسی پیچیده ای نسبت به روش های دیگر دارد. لازم است دقت این روش ها در حالت دوبعدی و حجم برنامه نویسی آنها بررسی شود.

ملاحظات اخلاقی

پیروی از اصول اخلاق پژوهش

نویسندگان اصول اخلاقی را در انجام و انتشار این پژوهش علمی رعایت نموده اند و این موضوع مورد تأیید همه آنها است.

مشارکت نویسندگان

همه نویسندگان به طور یکسان در مفهوم سازی مقاله و نوشتن پیش نویس های اصلی و بعدی مشارکت داشتند.

تعارض منافع

بنا بر اظهار نویسندگان این مقاله تعارض منافع ندارد

سپاسگزاری

از داوران محترم به خاطر ارائه نظرهای ساختاری و علمی سپاسگزاری می شود.

منابع

- آژدان، یعقوب، عمادی، علیرضا، دانش فراز، رسول، و چابک‌پور، جعفر. (۱۳۹۷). ارزیابی برخی از روابط تجربی در پیش‌بینی ضریب پراکندگی طولی. هفدهمین کنفرانس ملی هیدرولیک / ایران، دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران. <https://civilica.com/doc/811399>
- فتاحی چقابیگی، علی. (۱۳۹۱). مدل ریاضی شبیه‌سازی انتقال و پخش آلودگی در مجاری روباز. پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد، دانشگاه رازی. کرمانشاه، ایران.
- فتحی، نگار، رحیم‌پور، مجید، و رهنما، محمدباقر. (۱۳۹۳). حل عددی معادله پخش انتشار با استفاده از روش اجزاء محدود. سومین همایش بین‌المللی سامانه های سطوح آبگیر باران، بیرجند، ایران. <https://civilica.com/doc/919306>
- فردادی شیل‌سر، محمدجواد، مظاهری، مهدی، و محمدولی سامانی، جمال. (۱۴۰۰). حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی با ضرایب متغیر در رودخانه با استفاده از تبدیل لاپلاس. مجله مدیریت آب و آبیاری، ۱۱(۴)، ۶۸۳-۶۹۸. <https://doi.org/10.22059/jwim.2021.329149.911>
- محمودیان شوشتری، محمد. (۱۳۸۹). اصول جریان در مجاری روباز. انتشارات دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران. <https://www.isoom.com/book/1648721>
- مشهدگره، ندا، محمد ولی سامانی، جمال، و مظاهری، مهدی. (۱۳۹۲). حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی به ازای الگوی زمانی دلخواه منابع آلاینده نقطه‌ای توسط روش تابع گرین، نشریه هیدرولیک، ۸(۴)، ۱۳-۲۵. <https://doi.org/10.30482/jhyd.2014.6697>

References

- Ajdan, Y., Emadi, A., Chabokpour, J., & Daneshfaraz, R. (2018). Evaluation of some empirical relationships in predicting the longitudinal dispersion coefficient. In: *17th National Hydraulic Conference*, Faculty of Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran. <https://civilica.com/doc/811399> (In Persian)
- Barros, F.P.J. de, Colbrook, M.J., & Fokas, A.S. (2019). A hybrid analytical-numerical method for solving advection-dispersion problems on a half-line. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 139, 482-491. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.05.018>
- Carpenter, S.R., Caraco, N.F., Correll, D.L., Howarth, R.W., Sharpley, A.N., & Smith, V.H. (1998). Nonpoint pollution of surface waters with phosphorus and nitrogen, *Ecological Applications*, 8(3), 559-568. <https://doi.org/10.2307/2641247>
- Chapra, S.C. (1997). Surface water-quality modeling. *McGraw-Hill Publications*, New York. https://www.researchgate.net/publication/48447645_Surface_Water-Quality_Modeling
- Chen, H., Wu, Y., & Zhao, L. (2019). Application of Finite Volume Method in Groundwater Contamination Simulation. *Journal of Hydrology*, 577, 123-135. <https://www.researchgate.net/publication/344599189>
- Fardadi Shilsar, M. J., Mazaheri, M., & Mohammadvali Samani, J. (1400). Analytical solution of the pollution transfer equation with variable coefficients in a river using Laplace transform. *Journal of Water and Irrigation Management*, 11(4), 683-698. <https://doi.org/10.22059/jwim.2021.329149.911>
- Fathi, N., Rahimpour, M., & Rahnama, M. B. (2014). Numerical solution of diffusion equation using finite element method. *Third International Conference on Rainwater Catchment Surface Systems*, Birjand, Iran. <https://civilica.com/doc/919306>
- Fattahi Chaqabegi, A. (2012). Mathematical model for simulating the transfer and dispersion of pollution in open channels. Master's thesis. *Razi University*, Kermanshah, Iran. (In Persian)
- Gleick, P. H. (2003). Water Use. *Annual Review of Environment and Resources*, 28, 275-314. https://www.researchgate.net/publication/230557561_Water_use
- Jamali, N. (2019). Analysis and comparative study of numerical methods to solve ordinary differential equations with initial value problem. *International Journal of Advanced Research*, 7(5), 117-128. <http://dx.doi.org/10.21474/IJAR01/9010>
- Kato, S., Zhang, C., & Kano, M. (2023). Simple algorithm for judging equivalence of differential-algebraic equation systems. *Scientific reports*, 13(1), 11534. <http://dx.doi.org/10.1038/s41598-023-38254-y>
- Kilic, M. (2021). Water Pollution: Causes, Negative Effects and Prevention Methods. *Istanbul Sabahattin Zaim University Journal of the Institute of Science and Technology*, 15(4), 129-132. <https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/1514334>
- Kumar, A., Singh, R., & Patel, S. (2021). A Comparative Study of Finite Volume and Finite Element Methods for Pollutant Transport Modeling. *Water Resources Management*, 35(10), 3507-3523. <http://dx.doi.org/10.1142/S0219876208001522>
- Kumar, D., Kumar, N., & Yadav, R. (2022). Analytical solution for transport of pollutant from time-dependent locations along groundwater, *Journal of Hydrology*, 610, 0022-1694. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2022.127826>
- Lapworth, D.J., Baran, N., Stuart, M.E., & Ward, R.S. (2012). Emerging organic contaminants in groundwater: A review of sources, fate and occurrence. *Environmental Pollution*, 163, 287-303. <https://doi.org/10.1016/j.envpol.2011.12.034>
- Mahmoud, A., Abdelrahman, E., Inc, Mustafa, Abdo, N., & Mobarak, M. (2022). New exact solutions for the reaction-diffusion equation in mathematical physics. *Journal of Ocean Engineering and Science*. <https://doi.org/10.1016/j.joes.2022.05.006>
- Mahmoudian Shushtari, M. (2009). Principles of Flow in Open Channels. *Shahid Chamran University of Ahwaz Publications*, Ahwaz, Iran. <https://www.gisoom.com/book/1648721> (In Persian)

- Meshdgharmeh, N., Mohammadi Vali, S., & Mazaheri, M. (2013). Analytical solution of the pollution transport equation for arbitrary time pattern of point source pollutants using the Green's function method, *Hydraulic Journal*, 8(4), 13-25. <https://doi.org/10.30482/jhyd.2014.6697> (In Persian)
- Noye, J. (1987). Numerical Methods for Solving the Transport Equation. *North-Holland Mathematics Studies*, North-Holland, 145, 195-229. [https://doi.org/10.1016/S0304-0208\(08\)70035-5](https://doi.org/10.1016/S0304-0208(08)70035-5)
- Peyret, R. (2002). Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow, *Springer New York*, New York. <http://doi.org/10.1007/978-1-4757-6557-1>
- Sharma, P., (2018). Transport of Contaminants in Groundwater. *ISH Journal of Hydraulic Engineering*, 26, 1-10. <http://doi.org/10.1080/09715010.2018.1438213>
- Tadmor, E., (1989). Convergence of spectral methods for nonlinear conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 26(1), 30-44. <https://www.jstor.org/stable/2157705>
- Van Genuchten, M. Th., & Alves, W.J. (1982). Analytical solutions of the one-dimensional convective-dispersive solute transport equation. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2(7). https://www.researchgate.net/publication/234255114_Analytical_Solutions_of_One_Dimensional_Convective_Dispersive_Solute_Transport_Equations
- Yadav, R.R., Jaiswal, D.K. & Yadav, H.K., (2010). Analytical solution of one dimensional temporally dependent advection-dispersion equation in homogeneous porous media. *International Journal of Engineering, Science and Technology*, 2(5), 141-148. <http://doi.org/10.4314/ijest.v2i5.60133>