



Simulating groundwater level fluctuations using linear regression (SVR) and extreme learning (ELM) machine models

Safoura Pirouzmehr¹ , Mohammad Ali Izadbakhsh^{2✉} , Saeid Shabanlou³ ,
Ahmad Rajabi⁴ , and Fariborz Yosefvand⁵

1. Department of Water Engineering, Kermanshah Branch, Islamic Azad University, Kermanshah, Iran. E-mail: s.pirouzmehr@gmail.com
2. Corresponding author, Department of Water Engineering, Kermanshah Branch, Islamic Azad University, Kermanshah, Iran. E-mail: izadbakhsh.mohammad.ali@gmail.com
3. Department of Water Engineering, Kermanshah Branch, Islamic Azad University, Kermanshah, Iran. E-mail: saeid.shabanlou@gmail.com
4. Department of Water Engineering, Kermanshah Branch, Islamic Azad University, Kermanshah, Iran. E-mail: ahmad.rajabi1974@gmail.com
5. Department of Water Engineering, Kermanshah Branch, Islamic Azad University, Kermanshah, Iran. E-mail: fariborzosefvand@gmail.com

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received 20 January 2025

Received in revised form 19 March 2025

Accepted 10 April 2025

Available online 23 September 2025

Keywords:

groundwater level,
support vector,
machine regression,
extreme learning,
machine model,
machine learning.

ABSTRACT

Objective: In this study, two advanced machine learning methods, namely support vector machine (SVR) and extreme learning machine (ELM), are investigated for the groundwater level simulation.

Method: The SVR model performs well due to its ability to simulate complex and nonlinear relationships and the use of kernel functions for accurate prediction. The ELM model, with its high computational speed and structural simplicity, is suitable for processing large and complex data. In this study, 10-year data including groundwater level, precipitation, evaporation and temperature with monthly time steps were used to develop these models. All variables were normalized to the range of 0 to 1 to prevent bias in the models. And RMSE, NSE and R^2 indices were used to evaluate the performance of the models.

Results: The results showed that the ELM model with polynomial activation function provided the best performance in both training and testing stages (Training: RMSE=0.1747, NSE=0.9045, R^2 =0.9097), (Test: RMSE=0.1675, NSE=0.9048, R^2 =0.9098). In contrast, the SVR model with the multi-attack kernel function showed the best accuracy in both stages (Training: RMSE=0.2246, NSE=0.8740, R^2 =0.9038), (Test: RMSE=0.2218, NSE=0.8758, R^2 =0.9048).

Conclusions: The findings of this study indicate that the ELM model can be used as an effective tool in groundwater resources management. On the other hand, the poor performance of the SVR model with the linear kernel indicates its inefficiency in modeling nonlinear relationships in data from arid and semi-arid regions.

Cite this article: Pirouzmehr, S., Izadbakhsh, M.A., Shabanlou, S., Rajabi, A., & Yosefvand, F. (2025). Simulating groundwater level fluctuations using linear regression (SVR) and extreme learning (ELM) machine models, *Advanced Technologies in Water Efficiency*, 5(3), 1-19. <https://doi.org/10.22126/atwe.2025.11658.1150>



© The Author(s)

<https://doi.org/10.22126/atwe.2025.11658.1150>

Publisher: Razi University.

Introduction

Groundwater level modeling in arid and semi-arid regions, such as the Bahar Plain, plays a crucial role in sustainable water resources management. Decreasing precipitation and increasing water demand in these regions have led to significant declines in groundwater levels, which have adverse effects on agriculture, drinking water supply, and natural ecosystems. In order to plan and manage water resources optimally, it is essential to use accurate and efficient forecasting models to analyze groundwater level variations

Method

MODFLOW numerical model

In this study, two advanced machine learning methods, namely support vector machine (SVR) and extreme learning machine (ELM), are investigated for the groundwater level simulation. The SVR model is effective in forecasting problems such as groundwater level changes due to its high ability to identify complex and nonlinear relationships between data. This model is able to discover hidden patterns in the data and provide accurate predictions by using the kernel functions. On the other hand, the ELM model is a suitable tool for processing large and complex data due to its high computational speed and structural simplicity. This model uses single-layer neural networks and is able to perform learning in a short time. One of the main challenges in using these models is the precise adjustment of parameters, which has a direct impact on their accuracy and efficiency. In this study, 10-year data including groundwater level, precipitation, evaporation, and temperature with a monthly time step are used to develop these models. All variables are normalized to a range of 0 to 1 to prevent bias in the models, and RMSE, NSE, and R^2 indices are used to evaluate the performance of the models.

Bahar Plain is located in the northwest of Hamedan Province, near the city of Bahar, and is considered one of the most important agricultural plains in this region. This vast plain plays a significant role in supplying the province's agricultural products due to its fertile soils and groundwater resources. The groundwater of this plain is considered the main source of water for agriculture, drinking water, and local industries, and this feature determines its high importance in the economic development and food security of the region. However, in recent years, due to excessive groundwater extraction, the water level of this plain has dropped sharply, causing problems such as reduced well yields and land subsidence. This plain is located in a semi-arid region with an average annual precipitation of between 300 and 350 mm, which occurs mainly in the form of winter and spring rainfall. This amount of precipitation is not enough to provide surface water and recharge the groundwater aquifers of this plain, and due to climate change and the decrease in precipitation in recent years, the amount of inflow to groundwater resources has decreased significantly. This decrease has turned the Hamedan Bahar Plain into a water crisis area, and this has increased the need for water resource management, especially in the agricultural sector, and its optimal use.

Results

The results indicate that the ELM model with polynomial activation function provided the best performance in both training and testing stages. In contrast, the SVR model with linear kernel shows the lowest accuracy in both stages. The findings of this study indicate that the ELM model with polynomial activation function, due to its high ability in fast learning and processing complex data, has a significant performance in simulating groundwater level changes and can be used as an effective tool in groundwater resources management. On the other hand, the poor performance of the SVR model with linear kernel indicates its inefficiency in modeling nonlinear relationships in data from arid and semi-arid regions.

Conclusions

This research showed the importance of the selection of an appropriate model and optimal adjustment of parameters in improving the accuracy of predictions and help managers make decisions for sustainable operation of groundwater resources. In addition, the findings of this study proved that the selection of a suitable machine learning and its parameters for predicting the groundwater level in complex hydrological mediums is very important.

Author Contributions

All authors contributed equally to the conceptualization of the article and writing of the original and subsequent drafts.

Data Availability Statement

Data available on request from the authors .

Ethical Considerations

The authors avoided data fabrication, falsification, plagiarism, and misconduct .

Funding

This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Conflict of Interest

The authors declare no conflict of interest.



شبیه سازی نوسانات سطح آب زیرزمینی با استفاده از مدل های یادگیری ماشین رگرسیون خطی (SVR) و یادگیری افراطی (ELM)

صفورا پیروزمهر^۱، محمدعلی ایزدبخش^۲✉، سعید شعبانلو^۳، احمد رجبی^۴، و فریبرز یوسفوند^۵

۱. گروه مهندسی آب، واحد کرمانشاه، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمانشاه، ایران. رایانامه: s.pirouzmehr@gmail.com

۲. نویسنده مسئول، گروه مهندسی آب، واحد کرمانشاه، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمانشاه، ایران. رایانامه: izadbakhsh.mohammad.ali@gmail.com

۳. گروه مهندسی آب، واحد کرمانشاه، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمانشاه، ایران. رایانامه: saeid.shabanlou@gmail.com

۴. گروه مهندسی آب، واحد کرمانشاه، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمانشاه، ایران. رایانامه: ahmad.rajabi1974@gmail.com

۵. گروه مهندسی آب، واحد کرمانشاه، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمانشاه، ایران. رایانامه: ahmad.rajabi1974@gmail.com

چکیده

اطلاعات مقاله

هدف: هدف از این مطالعه مدل سازی سطح آب زیرزمینی در مناطق خشک و نیمه خشک، مانند دشت بهار، برای مدیریت پایدار منابع آبی با استفاده از دو مدل یادگیری ماشین پیشرفته، یعنی ماشین بردار پشتیبان (SVR) و ماشین یادگیری شدید (ELM) است.

نوع مقاله:

مقاله پژوهشی

روش پژوهش: در این مطالعه، داده های ۱۰ ساله شامل سطح آب زیرزمینی، بارندگی، تبخیر و دما با گام زمانی ماهانه برای توسعه این مدل ها استفاده شد. تمامی متغیرها برای جلوگیری از بایاس شدن مدل ها به بازه ۰ تا ۱ نرمال سازی شدند و شاخص های RMSE، NSE و R^2 برای ارزیابی عملکرد مدل ها به کار گرفته شدند.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۱/۰۱

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۱۲/۲۹

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۱/۲۱

تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۰۷/۰۱

یافته ها: نتایج نشان داد که مدل ELM با تابع فعال ساز چندجمله ای در هر دو مرحله آموزش و آزمون بهترین عملکرد را ارائه داده است (آموزش: $R^2 = 0.9097$, $NSE = 0.9045$, $RMSE = 0.1747$)، (تست: $R^2 = 0.9098$, $NSE = 0.9048$, $RMSE = 0.1675$). در مقابل، مدل SVR با کرنل چندجمله ای بهترین دقت را در هر دو مرحله نشان داد (آموزش: $R^2 = 0.9038$, $NSE = 0.8740$, $RMSE = 0.2246$)، (تست: $R^2 = 0.9048$, $NSE = 0.8758$, $RMSE = 0.2218$).

کلیدواژه ها:

سطح آب زیرزمینی،

رگرسیون با ماشین بردار پشتیبان،

مدل ماشین یادگیری افراطی،

یادگیری ماشین.

نتیجه گیری: یافته های این مطالعه نشان می دهد که مدل ELM می تواند به عنوان ابزاری مؤثر در مدیریت منابع آب زیرزمینی استفاده شود. از سوی دیگر، عملکرد ضعیف مدل SVR با کرنل خطی حاکی از عدم کارایی آن در مدل سازی روابط غیرخطی در داده های مناطق خشک و نیمه خشک است.

استناد: پیروزمهر، صفورا؛ ایزدبخش، محمدعلی؛ شعبانلو، سعید؛ رجبی، احمد؛ و یوسفوند، فریبرز. (۱۴۰۴). شبیه سازی نوسانات سطح آب زیرزمینی با استفاده از مدل های یادگیری ماشین رگرسیون خطی (SVR) و یادگیری افراطی (ELM). *فناوری های پیشرفته در بهره وری آب*، ۵ (۳)، ۱۹-۱.

<https://doi.org/10.22126/atwe.2025.11658.1150>



© نویسندگان

شر: دانشگاه رازی.

مقدمه

آب های زیرزمینی به عنوان یکی از مهم ترین منابع تأمین آب شیرین، نقش اساسی در تأمین نیازهای آبی انسان ها، کشاورزی و صنعت ایفا می کنند (نوروزی خطیری و همکاران^۱، ۲۰۲۳).

شبیه سازی و مدل سازی سطح آب زیرزمینی یکی از ابزارهای کلیدی در مدیریت پایدار منابع آب است. با افزایش نیاز به منابع آبی در سراسر جهان، به ویژه در نواحی خشک و نیمه خشک، اهمیت شبیه سازی دقیق رفتار منابع آب زیرزمینی بیشتر از گذشته احساس می شود. این مدل ها به ما این امکان را می دهند که رفتار منابع آب زیرزمینی را تحت تأثیر عوامل مختلف از جمله برداشت های انسانی، تغییرات اقلیمی، و دیگر فعالیت های زیست محیطی پیش بینی کنیم. از این رو، استفاده از مدل های شبیه سازی به عنوان ابزاری جهت ارزیابی تأثیرات ناشی از مدیریت های مختلف، نقش مهمی در سیاست گذاری های مرتبط با آب ایفا می کند. شبیه سازی سطح آب زیرزمینی همچنین به ما در درک بهتر فرایندهای پیچیده هیدروژئولوژی کمک می کند (مزرعه و همکاران، ۲۰۲۳). مدل سازی هیدروژئولوژی با استفاده از داده های فیزیکی و شیمیایی منطقه می تواند جریان های آب زیرزمینی، انتقال آلودگی ها، و تأثیر تغییرات سطح زمین بر منابع آبی را به دقت شبیه سازی کند. این قابلیت، به ویژه در مناطقی که به شدت از منابع آب زیرزمینی برای تأمین آب شرب و کشاورزی استفاده می شود، اهمیت ویژه ای دارد، زیرا به کمک آن می توان با دقت بیشتری اثرات استخراج بیش از حد و تغییرات کاربری زمین را پیش بینی و کنترل کرد. مدل سازی و شبیه سازی آب زیرزمینی به طور مؤثر می تواند در پیش بینی بحران های زیست محیطی، از جمله خشکسالی ها و کاهش منابع آبی، نقشی اساسی ایفا کند (کینزل باچ و همکاران^۲، ۲۰۰۳). این مدل ها امکان ارزیابی و شبیه سازی تأثیر تغییرات اقلیمی، مانند کاهش بارش و افزایش دما، بر منابع آب زیرزمینی را فراهم می کنند. به همین دلیل، مدل های شبیه سازی به عنوان ابزاری کلیدی در مدیریت بحران های آبی شناخته می شوند. علاوه بر این، شبیه سازی های دقیق به مدیران و تصمیم گیران کمک می کند تا از استخراج بیش از حد منابع آب زیرزمینی جلوگیری کرده و برنامه های پایداری برای استفاده بهینه از این منابع تدوین کنند (جاکمن و همکاران^۳، ۲۰۱۶). در نهایت، استفاده از مدل های پیشرفته شبیه سازی سطح آب زیرزمینی می تواند به بهبود فرآیند تصمیم گیری در سطوح مختلف کمک کند. این مدل ها با ارائه داده های دقیق و قابل اطمینان درباره منابع آبی و روند تغییرات آنها، اطلاعات ارزشمندی را برای مدیریت بهینه منابع آب در اختیار می گذارند. مدل سازی و شبیه سازی نه تنها ابزار قدرتمندی برای برنامه ریزی کوتاه مدت و بلندمدت است، بلکه به عنوان روشی مؤثر برای جلوگیری از مشکلات محیطی نظیر نشست زمین، شور شدن آب و کاهش کیفیت منابع آبی مطرح می شود (تانگ و همکاران^۴، ۲۰۲۲). بنابراین، اهمیت شبیه سازی و مدل سازی سطح آب زیرزمینی نه تنها در مدیریت منابع موجود بلکه در حفظ آنها برای نسل های آینده حیاتی است.

ادبیات موضوع و پیشینه پژوهش

استفاده از مدل های یادگیری ماشین برای شبیه سازی و مدل سازی سطح آب زیرزمینی در سال های اخیر به عنوان یکی از روش های نوین و کارآمد در مدیریت منابع آبی مطرح شده است. مدل های یادگیری ماشین، با قدرت پردازش بالای خود در تحلیل داده های پیچیده و غیرخطی، این امکان را فراهم می کنند که الگوهای پنهان و روابط پیچیده بین متغیرهای محیطی و سطح آب زیرزمینی شناسایی شوند. این روش ها به ویژه زمانی اهمیت پیدا می کنند که داده های موجود ناکافی یا پراکنده باشند، و شبیه سازی های مبتنی بر مدل های سنتی قادر به پاسخگویی به نیازهای پیچیده مدیریتی نباشند (تائو و همکاران^۵، ۲۰۲۲). به همین دلیل تاکنون مطالعات فراوانی در این زمینه انجام شده است.

1. Norouzi Khatiri et al
2. Kinzelbach et al
3. Jakeman et al
4. Tang et al
5. Tao et al

گائور و همکاران^۱ (۲۰۲۱) به بررسی تکنیک‌های بهینه‌سازی مدل‌های شبکه عصبی مصنوعی (ANN) و ماشین بردار پشتیبان مبتنی بر موجک (WA-SVR) برای پیش‌بینی سطح آب زیرزمینی پرداختند. آن‌ها نشان دادند که مدل‌های ANN به دلیل توانایی در شبیه‌سازی روابط غیرخطی میان داده‌های ورودی و خروجی، بدون نیاز به درک کامل فرایندهای فیزیکی، قادرند پیش‌بینی دقیقی از سطح آب زیرزمینی ارائه دهند. در این تحقیق، عملکرد مدل‌ها با استفاده از شاخص‌های ضریب همبستگی (R^2) و شاخص کارایی نش - ساتکلیف (Ef) ارزیابی شد. یافته‌های مطالعه نشان داد که استفاده از معماری‌های مختلف شبکه و الگوریتم‌های آموزشی، از جمله الگوریتم لوبنبرگ - مارکوارت (LM)، می‌تواند کارایی مدل ANN را بهبود بخشد. علاوه بر این، مدل WA-SVR مبتنی بر تجزیه موجک دقت بالاتری نسبت به مدل ANN در شبیه‌سازی و پیش‌بینی سطح آب زیرزمینی نشان داد.

ملکزاده و همکاران^۲ (۲۰۱۹) به شبیه‌سازی تراز آب زیرزمینی منطقه کبودآهنک همدان با استفاده از مدل‌های مادفلو، ELM و WA-ELM پرداختند. نتایج نشان‌دهنده دقت بالای این مدل‌ها در پیش‌بینی تراز آب زیرزمینی بود، به‌طوری که ضریب همبستگی مدل مادفلو ۰.۹۱۷ و شاخص پراکندگی ۰.۰۰۰۴ محاسبه شد. در ادامه، ۱۰ مدل مختلف برای ELM و WA-ELM با ترکیب‌های ورودی و گام‌های زمانی مختلف ارزیابی شدند. بهترین دقت در مدل ELM با تابع فعال‌سازی sigmoid و در مدل WA-ELM با خانواده ویولت Daubechies2 به‌دست آمد. مدل WA-ELM با ضریب همبستگی ۰.۹۵۹ و ضریب نش ۰.۹۱۵، بهترین عملکرد را در پیش‌بینی تراز آب زیرزمینی داشت و به‌عنوان مدل برتر شناخته شد. این مطالعه نشان‌دهنده برتری مدل‌های ترکیبی در شبیه‌سازی مسائل پیچیده منابع آب است.

میرابی و همکاران^۳ (۲۰۱۹) در این مطالعه به ارزیابی عملکرد مدل‌های داده‌محور، شامل SVR، ANN برای پیش‌بینی سطح آب در آبخوان‌های محصور و غیرمحصور پرداخت. در این مطالعه، از ترکیب آزمون هیبریدی گاما (GT) و الگوریتم ژنتیک (GA) برای تعیین بهترین ورودی‌ها استفاده شد. نتایج نشان داد که مدل‌های SVR و ANN برای پیش‌بینی یک‌ماهه نسبت به پیش‌بینی‌های طولانی‌تر (دو و سه ماهه) دقت بیشتری داشتند و مدل SVR عملکرد بهتری نسبت به مدل ANN در پیش‌بینی سطح آب زیرزمینی تا سه ماه آینده داشت.

روشنی و همکاران^۴ (۲۰۲۲) عملکرد مدل‌های SVR و ترکیب آن با الگوریتم ابتکاری AIG را در شبیه‌سازی سطح آب زیرزمینی ماهانه دشت شبستر از سال ۲۰۰۱ تا ۲۰۱۹ ارزیابی کردند. در این مطالعه، از ۸۰ درصد داده‌ها برای آموزش و ۲۰ درصد برای تست مدل‌ها استفاده شد و کارایی مدل‌ها با شاخص‌های آماری نظیر ضریب همبستگی، کارایی نش - ساتکلیف، خطای ریشه میانگین مربعات (RMSE)، نسبت انحراف معیار و شاخص لگیتز و مک‌کیب مقایسه گردید. نتایج نشان داد که مدل ترکیبی SVR-AIG بهترین عملکرد را در هر دو مرحله آموزش و آزمون به‌دست آورد.

مزرعه و همکاران^۵ (۲۰۲۴) در این پژوهش به شبیه‌سازی نوسانات سطح آب زیرزمینی در آبخوان میقان با استفاده از مدل‌های MODFLOW و GMDH پرداختند و آن‌ها را در قالب مدل ترکیبی جدید ریاضی-یادگیری ماشینی (MMWEM) ترکیب کردند. داده‌های هیدرولوژیکی و هیدروژئولوژیکی منطقه برای دوره ۲۰۱۳-۲۰۲۳ استفاده شد. نتایج نشان داد که مدل GOA-GMDH عملکرد بهتری نسبت به مدل‌های دیگر داشته و مدل ترکیبی (MMWEM) دقت بالاتری در پیش‌بینی نسبت به مدل‌های جداگانه داشت.

شهبازی و همکاران^۶ (۲۰۲۳) در این پژوهش از مدل‌های SVR و ANN برای مدل‌سازی سطح آب زیرزمینی استفاده کردند و سپس ابزارهای پیش‌پردازش تبدیل موجک (WT) و تجزیه تجربی مود مکمل (CEEMD) را به این مدل‌ها اضافه کردند. چهار مدل ترکیبی شامل W-ANN، W-SVR، CEEMD-ANN و CEEMD-SVR توسعه یافت و عملکرد

1. Gaur et al
2. Malekzadeh et al
3. Mirabi et al
4. Roshni et al
5. Mazraeh et al
6. Shahbazi et al

آن‌ها با استفاده از شاخص‌های آماری ارزیابی شد. نتایج نشان داد که مدل ANN نسبت به SVR دقت بالاتری دارد و استفاده از ابزارهای پیش‌پردازش موجب بهبود دقت پیش‌بینی‌ها می‌شود.

از دیگر تحقیقات در زمینه موضوع این تحقیق می‌توان به تحقیقات عزیزی و همکاران^۱ (۲۰۲۳)؛ امیری و همکاران^۲ (۲۰۲۱)؛ شعبانلو^۳ (۲۰۱۸)؛ اسماعیلی و همکاران^۴ (۲۰۲۱)؛ فلاحی و همکاران^۵ (۲۰۲۳)؛ پناهی و همکاران^۶ (۲۰۲۲)؛ جلیلیان و همکاران^۷ (۲۰۲۲)؛ امان جلیلی و همکاران^۸ (۲۰۲۳)؛ قریب و همکاران^۹ (۲۰۲۰)؛ مقدم و همکاران^{۱۰} (۲۰۲۲)؛ و محمد و همکاران^{۱۱} (۲۰۲۳۲) اشاره کرد.

روش پژوهش

دشت بهار در شمال غربی استان همدان و در نزدیکی شهر بهار واقع شده است. این دشت با مساحتی گسترده، به دلیل برخورداری از خاک‌های حاصلخیز و منابع آبی زیرزمینی، نقش قابل توجهی در تأمین محصولات کشاورزی استاندارد دارد (قبادی و همکاران^{۱۲}، ۲۰۲۰). این دشت در یک منطقه نیمه‌خشک با بارش سالانه متوسطی بین ۳۰۰ تا ۳۵۰ میلی‌متر واقع شده است که عمدتاً به صورت بارش‌های زمستانی و بهاری رخ می‌دهد (افروزی و همکاران^{۱۳}، ۲۰۲۱). این میزان بارش برای تأمین آب سطحی و تغذیه سفره‌های زیرزمینی این دشت کافی نیست، و با توجه به تغییرات اقلیمی و کاهش بارش‌ها در سال‌های اخیر، میزان ورودی به منابع آبی زیرزمینی کاهش چشمگیری داشته است. این کاهش باعث شده که دشت بهار همدان به یک منطقه دارای بحران آبی تبدیل شود و این مسئله نیاز به مدیریت منابع آب به‌خصوص در حوزه کشاورزی و مصرف بهینه آن را افزایش داده است (بالالی و کاسبین^{۱۴}، ۲۰۲۲). با توجه به اهمیت این دشت در تولیدات کشاورزی و تأمین آب منطقه، نیاز به اجرای طرح‌های مدیریت یکپارچه منابع آب و ارتقای آگاهی‌های زیست‌محیطی میان کشاورزان و بهره‌برداران امری ضروری به نظر می‌رسد تا ضمن کاهش مصرف آب، از آلودگی منابع آبی نیز جلوگیری شود (رفیعی مهر و کالچی^{۱۵}، ۲۰۲۱).

برای توسعه این مدل‌ها از اطلاعات ماهانه سطح آب زیرزمینی، بارندگی، تبخیر و دما برای یک دوره ۱۸ ساله (۱۳۸۲ الی ۱۴۰۰) استفاده شد. با توجه به متفاوت بودن مقیاس این اطلاعات، برای جلوگیری از بایاس شدن مدل همه داده‌های مورد استفاده در بازه صفر و یک نرمال شدند. همچنین رای توسعه همه مدل‌ها از ۸۰ درصد داده‌ها برای آموزش و از سایر داده‌ها برای تست مدل‌ها استفاده شد. بعد از آماده شده داده‌ها از نرم افزار MATLAB ورژن ۲۰۱۹a برای توسعه مدل‌ها استفاده شد.

۱. شبکه عصبی رگرسیون ماشین بردار پشتیبان^{۱۶} (SVR)

SVR نسخه‌ای از مدل ماشین بردار پشتیبان^{۱۷} (SVM) است که برای مسائل رگرسیونی طراحی شده است. هدف اصلی SVR، پیش‌بینی مقادیر پیوسته به جای طبقه‌بندی داده‌هاست، این مدل تلاش می‌کند تا با استفاده از یک تابع هسته، فاصله‌ی بین داده‌های واقعی و پیش‌بینی شده را در حدود یک مقدار خطا حداقل کند (احمد و همکاران^{۱۸}، ۲۰۲۳). یکی از ویژگی‌های کلیدی SVR،

1. Azizi et al
2. Amiri et al
3. Shabanlou
4. Esmaceli et al
5. Fallahi et al
6. Panahi et al
7. Jalilian et al
8. Aman Jalili et al
9. Gharib et al
10. Moghadam et al
11. Mohammed et al
12. Ghobadi et al
13. Afrozi et al
14. Balali & Kasbian
15. Rafiemehr & Kaleji
16. Support Vector Regression (SVR)
17. Support Vector Machine (SVM)
18. Ahmed et al

توانایی آن در کنترل حاشیه خطا و افزایش دقت مدل است که با تنظیم پارامترهای "C" و "epsilon" امکان‌پذیر است. پارامتر C به‌عنوان یک ضریب جریمه عمل کرده و کمک می‌کند تا مدل از پیچیدگی بیش از حد جلوگیری کند و هم‌زمان دقت بالاتری ارائه دهد. عملکرد SVR وابستگی زیادی به انتخاب تابع هسته مناسب دارد (بالوگون و همکاران^۱، ۲۰۲۱). تابع هسته تعیین می‌کند که چگونه داده‌های ورودی به فضای ویژگی‌ها نگاشت می‌شوند و ساختارهای غیرخطی در داده‌ها به‌درستی مدل‌سازی می‌شوند (ژانگ و اودونل^۲، ۲۰۲۰). انتخاب مناسب هسته و پارامترهای SVR نه تنها بر دقت پیش‌بینی تأثیرگذار است، بلکه بر زمان محاسباتی و عملکرد کلی مدل نیز اثر می‌گذارد. با این حال، یکی از چالش‌های SVR، نیاز به تنظیم دقیق پارامترهای آن است که می‌تواند هزینه محاسباتی بالایی را به همراه داشته باشد، به‌ویژه در صورت استفاده از جستجوی شبکه برای یافتن بهترین پارامترها. با وجود این، SVR در بسیاری از حوزه‌ها مانند پیش‌بینی سری‌های زمانی، تخمین قیمت و سیستم‌های توصیه‌گر به دلیل دقت بالا و توانایی تعمیم خوب در مواجهه با داده‌های نویزی محبوب است، این ویژگی‌ها باعث شده SVR به طور گسترده‌ای در مسائل مرتبط با مدیریت منابع آب استفاده شود (پناهی و همکاران^۳، ۲۰۲۰). اگر N تعداد نمونه باشد به‌طوری‌که $\{x_k, y_k\}_{k=1}^N, x \in R^m, y \in R$ در این حالت معادله استفاده شده توسط مدل SVR را میتوان به صورت زیر نوشت (اسمولا و اسچولکوف^۴، ۲۰۰۴).

$$f(x) = w \cdot \phi(x) + b \quad (1)$$

که در آن x بردار متغیرهای ورودی است، w بردار وزن‌ها است، b بردار بایاس است، ϕ نوعی تابع غیرخطی برای تبدیل کردن متغیرهای ورودی به فضای جدید با ابعاد بالاتر است. با در نظر گرفتن فرضیات مختلف می‌توان نوعی مسئله بهینه‌سازی محدب را برای حل این معادله و محاسبه مقدار بهینه وزن‌ها معرفی کرد.

$$\min_{w, b, \xi_i, \xi_i^*} \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^m (\xi_i + \xi_i^*) \quad (2)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} w \cdot \phi(x_i) + b - y_i \leq \varepsilon + \xi_i \\ y_i - w \cdot \phi(x_i) - b \leq \varepsilon + \xi_i^* \\ \xi_i, \xi_i^* \geq 0; i=1, 2, 3, \dots, m \end{cases}$$

که در آن ξ_i, ξ_i^* متغیر کمکی^۵ هستند، C یک عدد مثبت با مقدار مشخص برای جلوگیری بیش‌برازش مدل است. در نهایت این مسئله بهینه‌سازی را میتوان با استفاده تئوری دوگانه^۶ و با در نظر گرفتن ضریب لاگرانژ و محدودیت‌های بهینه‌حل کرد، بر این اساس رابطه (۲) را میتوان به صورت زیر نوشت.

$$f(x, \beta_i, \beta_i^*) = \sum_{i=1}^n (\beta_i - \beta_i^*) k(x_i, x_j) + b \quad (3)$$

که در آن $k(x_i, x_j)$ تابع کرنل است که برابر است با $\phi(x_i)\phi(x_j)$. توابع کرنل از مهم‌ترین بخش‌های مدل SVR است، به همین دلیل همواره تلاش می‌شود از توابع مناسبی برای این کار استفاده شود، در این مطالعه از تابع خطی، سیگموئید، RBF و چند جمله‌ای استفاده شد. هر یکی از این توابع پارامترهایی دارند که تعیین مقدار دقیق آن‌ها تأثیر چشمگیری در دقت مدل SVM دارد، به همین دلیل همیشه سعی میشود از روش‌های دقیقی برای تعیین مقدار این پارامترها استفاده کرد.

1. Balogun et al
2. Zhang & O'Donnell
3. Panahi et al
4. Smola & Schölkopf
5. Slack variables
6. Duality Theory

۲. ماشین یادگیری افراطی (ELM)^۱

ELM یک نوع شبکه عصبی تک لایه‌ای پیش‌خور است که به دلیل سرعت بالا و سادگی ساختار در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته‌اند. برخلاف شبکه‌های عصبی سنتی که وزن‌های لایه‌های پنهان خود را از طریق فرایندهای محاسباتی پیچیده تنظیم می‌کنند، در مدل ELM وزن‌های لایه پنهان به صورت تصادفی تعیین می‌شوند و تنها وزن‌های لایه خروجی از طریق روش‌های ساده و تحلیلی بهینه می‌شوند. این ویژگی منجر به کاهش چشمگیر زمان محاسباتی در مراحل یادگیری می‌شود و ELM را به مدلی سریع و کارآمد تبدیل می‌کند که می‌تواند برای مسائل بلادرنگ و سیستم‌هایی با محدودیت منابع مناسب باشد (کومار و همکاران، ۲۰۲۰).

ELM توانایی پردازش داده‌های غیرخطی را دارد و این کار را با استفاده از توابع فعال‌سازی غیرخطی در لایه پنهان انجام می‌دهد. توابع فعال‌سازی رایج در ELM مانند linear, sigmoid, RBF and Polynomial به مدل کمک می‌کنند تا داده‌های پیچیده و با الگوهای غیرخطی را با دقت قابل قبولی پردازش کند. از آنجاکه نیازی به تنظیم وزن‌های لایه‌های پنهان نیست، این مدل‌ها از پیچیدگی محاسباتی کمتری نسبت به مدل‌های یادگیری عمیق یا شبکه‌های عصبی چندلایه برخوردارند، و همین امر آن‌ها را برای کاربردهایی که سرعت پردازش و کارایی اهمیت دارند، مناسب می‌کند (لی و همکاران، ۲۰۲۰).

یکی از مزایای دیگر مدل ELM قابلیت تعمیم‌پذیری بالای آن است. به دلیل عدم نیاز به تنظیم پارامترهای داخلی، این مدل بر روی داده‌های آزمایشی عملکرد خوبی دارد و از مشکلاتی مانند بیش‌برازش که در شبکه‌های عصبی پیچیده‌تر مشاهده می‌شود، کمتر رنج می‌برد، از این رو، ELM در مدیریت منابع آب محبوبیت زیادی یافته است (علی امیر و همکاران، ۲۰۲۳).

بالین حال، ELM نیز با چالش‌هایی مواجه است. از آنجایی که وزن‌های لایه‌های پنهان به صورت تصادفی تنظیم می‌شوند، ممکن است مدل در برخی موارد به نتایج ناپایدار برسد، و به همین دلیل عملکرد آن بسته به داده‌های ورودی و توزیع تصادفی اولیه وزن‌ها ممکن است متفاوت باشد. برای مقابله با این مسئله، برخی از تحقیقات پیشنهاد بهبودهایی مانند انتخاب استراتژیک وزن‌های اولیه یا ترکیب ELM با دیگر تکنیک‌های بهینه‌سازی را ارائه داده‌اند (عزیزپور و همکاران، ۲۰۲۱). بالین حال، به دلیل مزایای بسیار ELMها در سرعت و سادگی، همچنان یکی از مدل‌های پرتعداد در حوزه یادگیری ماشین به شمار می‌روند و به طور گسترده در مسائل کاربردی و پژوهشی مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای N نمونه یادگیری مختلف اگر یک دیتاست شامل N نمونه آموزش متمایز باشد (x_i, t_i) به طوری که $x_i \in R^n$ متغیر ورودی و $t_i \in R^n$ متغیر خروجی مدل باشد. با استفاده از L گره پنهان و یک تابع فعال ساز (G) میتوان یک مدل ELM را توسعه داد (هووانگ و همکاران، ۲۰۰۶).

$$t_j = \sum_{i=1}^N \beta_i \cdot G(a_i \cdot x_j + b_i) \quad j=1,2,3 \dots N \quad (4)$$

که در آن $a_i = [a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} \dots a_{in}]^T$ بردار ضرایب وزنی بین گره ورودی و گره پنهان i ام است و $\beta_i = [\beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_{i3} \dots \beta_{im}]^T$ بردار ضرایب وزنی بین گره پنهان i ام و گره‌های خروجی است. b_i ضریب بایاس گره پنهان i ام است. $G(a_i x_j + b_i)$ خروجی گره پنهان i ام با توجه به ورودی‌های x_j است.

رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$H\beta = T \quad (5)$$

1. Extreme learning machine

2. Kumar et al

3. Li et al

4. Alizamir et al

5. Azizpour et al

6. Huang et al

$$Y = \begin{bmatrix} y_1^T \\ \vdots \\ y_N^T \end{bmatrix}_{N \times m} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1^T \\ \vdots \\ \beta_{\tilde{N}}^T \end{bmatrix}_{\tilde{N} \times m}$$

$$H(w_1 \dots w_N, b_1 \dots b_N, x_1 \dots x_N) = \begin{bmatrix} G(a_1 \cdot x_1 + b_1) & \dots & G(a_N \cdot x_1 + b_N) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ G(a_1 \cdot x_N + b_1) & \dots & G(a_N \cdot x_N + b_{\tilde{N}}) \end{bmatrix}_{N \times N}$$

اگر تعداد نورون‌های مخفی با تعداد داده‌هایی که برای آموزش استفاده می‌شود برابر باشد، $(N = N)$ ماتریس H مربعی و معکوس‌پذیر می‌شود، در این صورت SLFN می‌تواند نمونه‌ای آموزش را با خطای صفر تخمین زند. اما در بیشتر موارد تعداد نورون‌های مخفی بسیار کوچک‌تر از تعداد داده‌ها برای آموزش است $(N < N)$ در این حالت ماتریس H غیرمربعی خواهد شد که در آن پارامترهای w_i, b_i, β_i ($i=1,2,3 \dots N$) وجود ندارند به طوریکه در رابطه $H\beta=T$ صدق کنند. به همین دلیل در این شرایط پارامترهای w_i, b_i, β_i ($i=1,2,3 \dots N$) را می‌توان با استفاده از رابطه زیر محاسبه کرد (هووانگ و همکاران، ۲۰۱۱).

$$\|H(a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N)\beta - T\| = \min_{w_i, b_i, \beta} \|H(a_1, \dots, a_L, b_1, \dots, b_L)\beta - T\| \quad (6)$$

که در آن H ماتریس خروجی لایه پنهان مدل ELM است، β ماتریس وزن‌های خروجی است $[\beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_{i3} \dots \beta_{in}]^T$ ماتریس نمونه‌های شبیه‌سازی شده است $[t_{i1}, t_{i2}, t_{i3} \dots t_{in}]^T$. رابطه بالا معادل است با حداقل کردن تابع هزینه زیر:

$$E = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \beta_i g(w_i \cdot x_j + b_i) - t_j \right)^2 \quad (7)$$

در نهایت مقدار β را می‌توان عملیات ساده معکوس تعمیم‌یافته از ماتریس خروجی لایه پنهان محاسبه کرد.

$$\beta^* = H^\dagger T \quad (8)$$

که در آن $H^\dagger$ تعمیم معکوس مون-پنروز از ماتریس خروجی لایه پنهان است، و می‌توان آن را با استفاده از روش‌های مختلفی مانند singular value decomposition (SVD) محاسبه کرد.

۳. شاخص‌های ارزیابی عملکرد مدل‌ها

در این مطالعه برای ارزیابی عملکرد مدل‌ها از شاخص‌های خطای میانگین مربعات ریشه‌ای (RMSE)، شاخص کارایی نش - سوتکلیف (NSE)، ضریب تعیین (R^2) استفاده شد. شاخص R^2 یک معیار آماری است که میزان تناسب مدل با داده‌های واقعی را اندازه‌گیری می‌کند. به عبارت دیگر، R^2 نشان‌دهنده درصد تغییرات داده‌های واقعی است که مدل قادر به پیش‌بینی آن‌ها می‌باشد. شاخص NSE برای ارزیابی دقت مدل‌های پیش‌بینی در زمینه‌های هیدرولوژی و دیگر حوزه‌ها به کار می‌رود. این شاخص مقایسه‌ای بین خطای مدل و واریانس داده‌های واقعی است و نشان‌دهنده توانایی مدل در شبیه‌سازی تغییرات داده‌ها می‌باشد. شاخص RMSE یک معیار متداول برای ارزیابی دقت پیش‌بینی مدل‌های رگرسیونی است. این شاخص میزان خطای مدل را با مقایسه پیش‌بینی‌ها و مقادیر واقعی اندازه‌گیری می‌کند.

(روابط (۹) الی (۱۱))

$$RMSE = \left[N^{-1} \sum_{i=1}^N (y_i - O_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

$$NSE = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (O_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^N (O_i - \bar{O})^2} \quad (10)$$

$$R^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^N (F_i - \bar{Y})(O_i - \bar{O}) \right]^2}{\left[\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 \right] \left[\sum_{i=1}^N (O_i - \bar{O})^2 \right]} \quad (11)$$

در این رابطه N تعداد مشاهددها است، y_i مقدار پیشبینی شده است، O_i مقدار مشاهده ای است و $\bar{Y}$ و $\bar{O}$ به ترتیب متوسط مقادیر y_i و O_i هستند.

یافته های پژوهش

ابتدا مدل SVM توسعه داده شد و عملکرد آن با استفاده از توابع کرنل مختلف ارزیابی شد. برای انتخاب بهترین متغیرهای ورودی به مدل در این مطالعه از روش آزمون و خطا استفاده شد. بر این اساس بعد از چندین بار اجرای مدل با توابع فعال ساز مختلف و ارزیابی نتایج آن ها مشخص شد که این مدل با سطح آب زیرزمینی در گام زمانی t-1, t-2 و بارندگی در گام زمانی t بهترین عملکرد را دارد. بر اساس نتایج حاصل مدل SVR با تابع کرنل چندجمله ای بهترین عملکرد را دارد، به طوری که مقدار شاخص های R^2 , NSE, RMSE این مدل در مرحله آموزش به ترتیب برابر ۰/۹۰۳۸، ۰/۸۷۴۰ و ۰/۲۲۴۶ است در حالی که مقدار انی شاخص ها برای مرحله تست بیه ترتیب برابر ۰/۹۰۴۸، ۰/۸۷۵۸ و ۰/۲۲۱۸ است. در این حالت مقدار پارامترهای C , d , γ , ϵ به ترتیب برابر ۳/۷۶۱، ۴، ۰/۲۵۴ و ۰/۰۰۲ است. همچنین این مدل با تابع کرنل خطی بدترین عملکرد را دارد به طوری که مقدار شاخص های R^2 , MAE, RMSE این مدل در مرحله آموزش به ترتیب برابر ۰/۸۹۶۵، ۰/۸۴۱۳ و ۰/۲۵۴۵ است در حالی که مقدار این شاخص ها برای مرحله تست به ترتیب برابر ۰/۸۹۷۱، ۰/۸۴۳۳ و ۰/۲۴۹۷ است. در این حالت مقدار پارامترهای C , ϵ به ترتیب برابر ۰/۰۰۵، ۰/۴۳۵۳ و ۰/۳۱۴۵ است که در جدول (۱) نشان داده شده است.

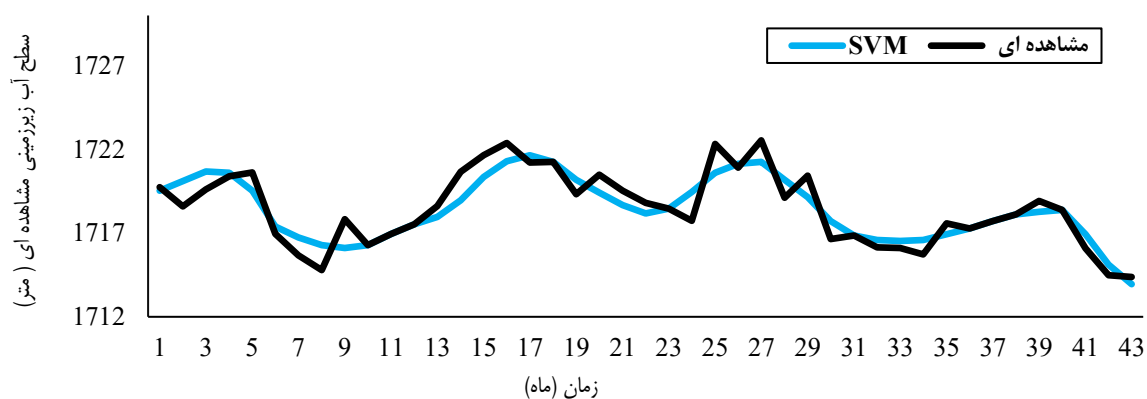
جدول ۱. شاخص های ارزیابی دقت مدل SVM با توابع فعال سازی مختلف در طول دوره آموزش و تست.

تابع کرنل	آموزش			تست		
	RMSE	NSE	R^2	RMSE	NSE	R^2
Radial basis	0.2456	0.8560	0.8981	0.2408	0.8569	0.8983
Sigmoid	0.2336	0.8655	0.8996	0.2287	0.8660	0.8998
Linear	0.2545	0.8413	0.8965	0.2497	0.8433	0.8971
Polynomial	0.2246	0.8740	0.9038	0.2218	0.8758	0.9048

علاوه بر این بر اساس نتایج حاصل از این جدول شاخص های خطا مدل SVR با توابع کرنل مختلف در مرحله تست نسبت به مرحله آموزش بهتر هستند، این مسئله یکی از مهم ترین شاخص های برای ارزیابی احتمال بیش برآزش شدن مدل است. بیش برآزش در مدل های شبکه عصبی و رگرسیون بردار پشتیبان زمانی رخ می دهد که مدل به طور بیش از حد به جزئیات داده های آموزشی وابسته شود و به جای یادگیری الگوهای کلی جزئیات تصادفی داده ها را نیز به عنوان الگو شناسایی کند. این امر سبب می شود مدل در هنگام پردازش داده های جدید (که در مجموعه آموزشی وجود نداشتند) عملکرد ضعیف تری نشان دهد و دقت پیش بینی کاهش یابد. در مدل های SVR، بیش برآزش می تواند ناشی از انتخاب نادرست پارامترهایی مانند کرنل یا مقدار پارامتر C باشد که حساسیت مدل به داده ها را تعیین می کنند. برای مقابله با این مسئله، از روش هایی مانند تنظیم پارامترها از طریق اعتبارسنجی متقابل، کاهش ابعاد، استفاده می شود. این تکنیک ها کمک می کنند تا مدل از یادگیری الگوهای غیر عمومی اجتناب کرده و به تعادل بهینه ای بین دقت و پیچیدگی دست یابد که در نتیجه آن، عملکرد بهتری در مواجهه با داده های واقعی خواهد داشت. همچنین در شکل های ۱ تا ۴ مقدار سطح آب زیرزمینی مشاهده شده و مقدار شبیه سازی شده به وسیله مدل های SVM (Polynomial) و SVM (Linear) در دوره آموزش و تست نشان داده شده است.



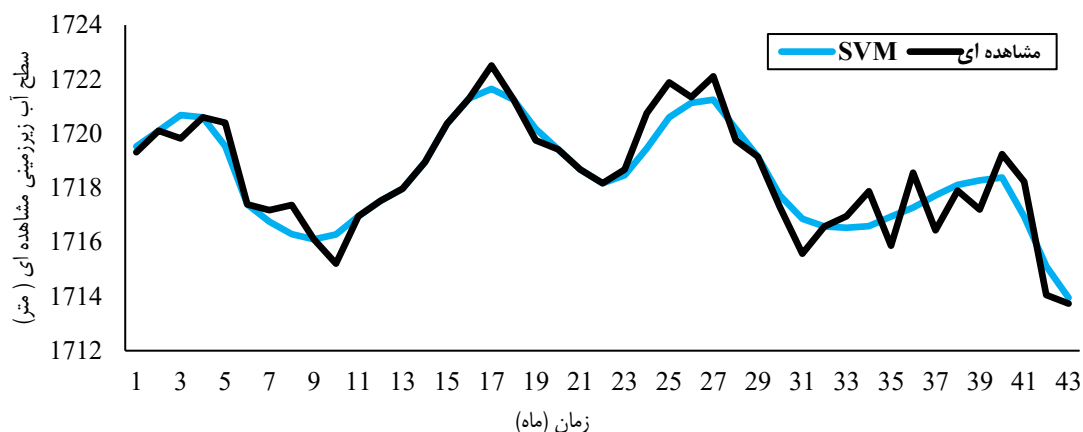
شکل ۱. عملکرد مدل SVM با تابع کرنل خطی برای پیش‌بینی سطح آب زیرزمینی در طول دوره آموزش



شکل ۲. عملکرد مدل SVM با تابع کرنل خطی برای پیش‌بینی سطح آب زیرزمینی در طول دوره تست



شکل ۳. عملکرد مدل SVM با تابع کرنل چندجمله‌ای برای پیش‌بینی سطح آب زیرزمینی در طول دوره آموزش

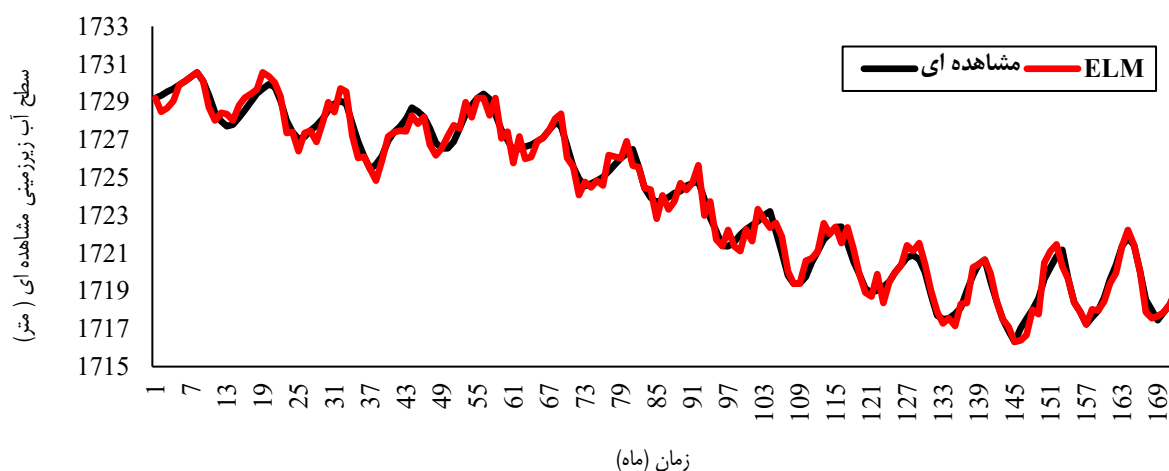


شکل ۴. عملکرد مدل SVM با تابع کرنل چندجمله ایی برای پیش بینی سطح آب زیرزمینی در طول دوره تست

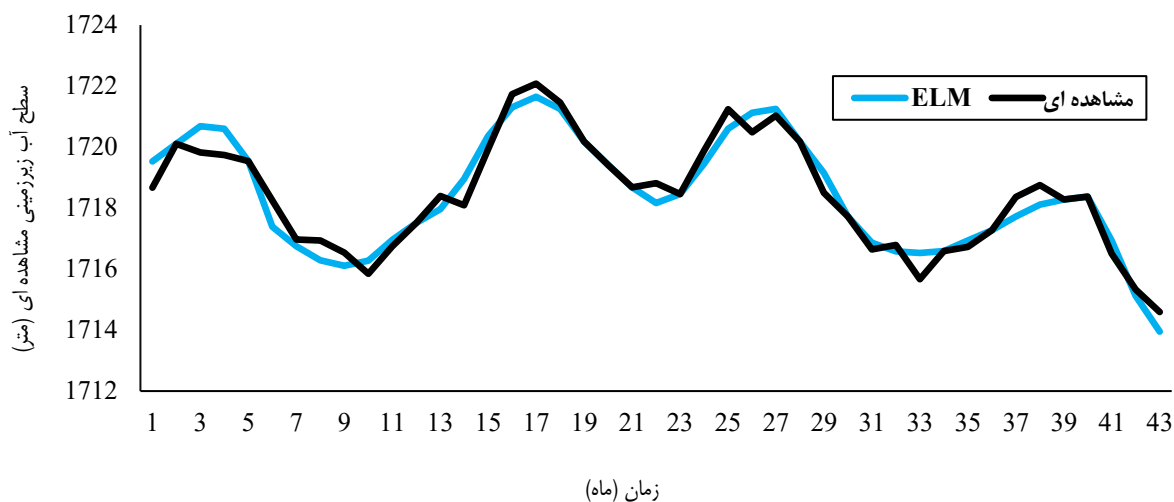
۱. مدل ELM

مانند مدل SVM برای انتخاب بهترین متغیرها برای توسعه مدل ELM نیز از روش سعی و خطا استفاده شد. به این ترتیب بعد از ارزیابی عملکرد این مدل با توجه فعال ساز مختلف مشخص شد که مدل ELM با متغیرهای ورودی سطح آب زیرزمینی در گام های زمانی $t-1$, $t-2$, $t-3$ و بارندگی در گام زمانی t بهترین عملکرد را دارد. به این ترتیب مدل ELM استفاده شده در این مطالعه از سه لایه تشکیل شده است. لایه ورودی این مدل شامل ۴ نورون است که هر کدام به ترتیب یکی از متغیرهای ورودی است ($GW_{t-1}, GW_{t-2}, GW_{t-3}, P_t$). در لایه خروجی، یک نورون قرار دارد که نتیجه نهایی یعنی سطح آب زیرزمینی در گام زمانی t است (GW_t). تعداد نورون های لایه پنهان نیز با استفاده از روش سعی و خطا تنظیم شد.

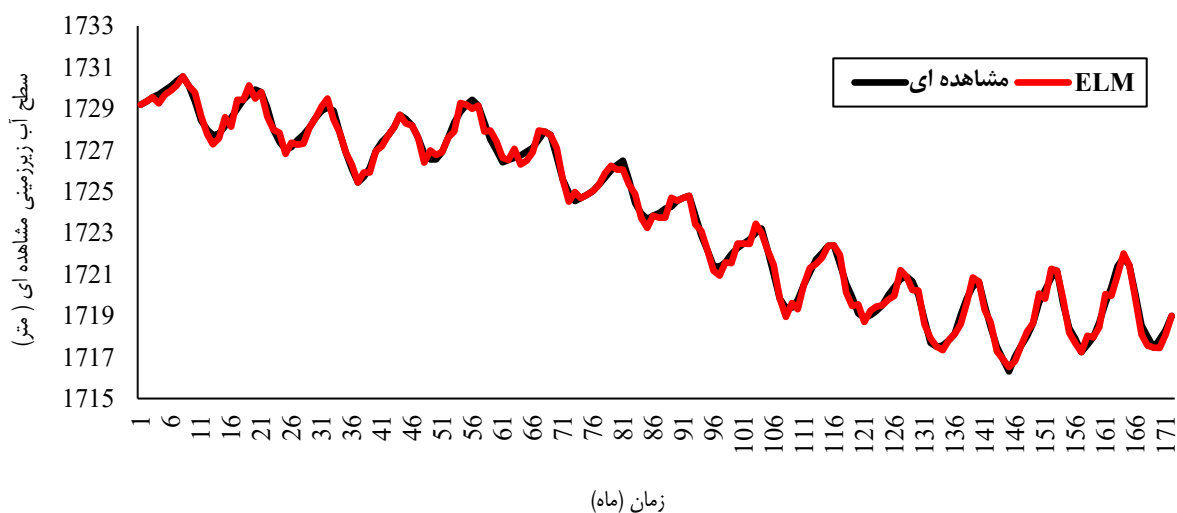
در این مطالعه مانند مدل SVM برای بررسی عملکرد مدل ELM، از چهار تابع فعال سازی مختلف شامل خطی، RBF، سیگموئید و چندجمله ای استفاده شد. جدول (۲) نتایج حاصل از این مدل با توابع فعال ساز مختلف را نشان می دهد. بر اساس این اطلاعات مدل ELM با تابع کرنل چندجمله ای و خطی به ترتیب بهترین و بدترین عملکرد را در مرحله آموزش و تست دارد. مقدار شاخص های $RMSE$, MSE , R^2 این مدل برای تابع کرنل خطی در مرحله آموزش به ترتیب برابر $۰/۸۸۶۰$, $۰/۹۰۵۸$, $۰/۲۱۶۷$ و برای مرحله تست به ترتیب برابر $۰/۹۰۶۶$, $۰/۸۸۸۸$, $۰/۲۱۲۸$ هستند و برای تابع کرنل سیگموئید در مرحله آموزش به ترتیب برابر $۰/۹۰۸۵$, $۰/۹۰۲۸$, $۰/۱۹۶۳$ و برای مرحله تست به ترتیب برابر $۰/۹۰۸۸$, $۰/۹۰۳۳$ و $۰/۱۹۰۹$ است.



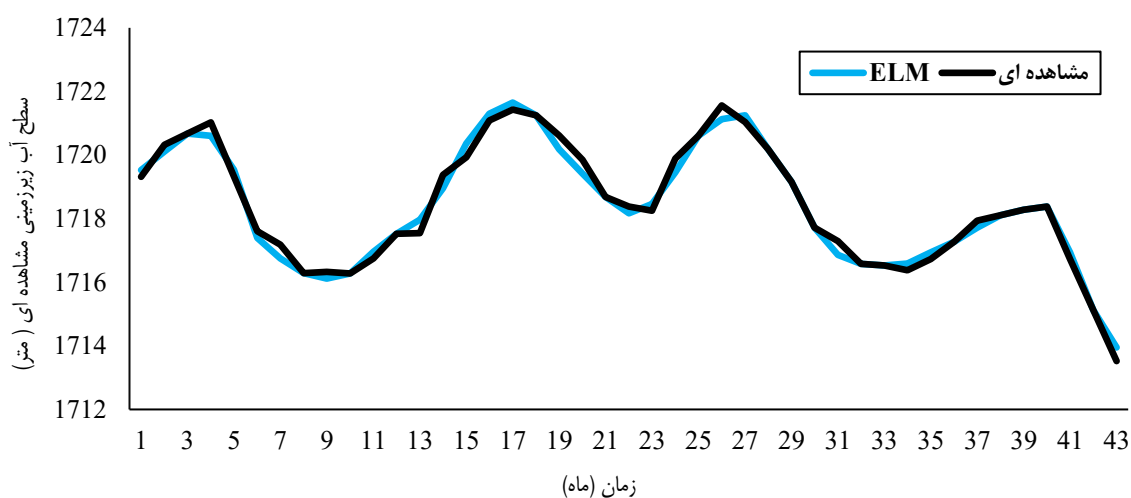
شکل ۵. عملکرد مدل ELM با تابع کرنل خطی برای پیش بینی سطح آب زیرزمینی در طول دوره آموزش



شکل ۶. عملکرد مدل ELM با تابع کرنل خطی برای پیش‌بینی سطح آب زیرزمینی در طول دوره تست



شکل ۷. عملکرد مدل ELM با تابع کرنل چندجمله‌ای برای پیش‌بینی سطح آب زیرزمینی در طول دوره آموزش



شکل ۸. عملکرد مدل ELM با تابع کرنل چندجمله‌ای برای پیش‌بینی سطح آب زیرزمینی در طول دوره تست

جدول ۲. شاخص های ارزیابی دقت مدل ELM با توابع فعال سازی مختلف در طول دوره آموزش و تست

تابع فعال ساز	آموزش				تست		
	Number of Neurons	RMSE	NSE	R^2	RMSE	NSE	R^2
Radial basis	32	0.2051	0.8960	0.9073	0.2020	0.8978	0.9078
Sigmoid	14	0.1963	0.9028	0.9085	0.1909	0.9033	0.9088
Linear	22	0.2167	0.8860	0.9058	0.2128	0.8888	0.9066
Polynomial	17	0.1747	0.9045	0.9097	0.1675	0.9048	0.9098

۲. مقایسه کارایی مدل های SVM و ELM

بعد از توسعه مدل های SVM و ELM نتایج آن ها از چندین جنبه با یکدیگر مقایسه شدند، بر اساس نتایج حاصل از اجرای این مدل ها با توابع کرنل مختلف و ارزیابی نتیجه آن ها با شاخص های خطا متفاوت مشخص شد که مدل ELM نسبت به مدل SVM کارایی بهتری دارد. به طور دقیق تر برای هر یک از توابع کرنل خطی، سیگموئید، RBF و چندجمله ای مدل ELM نسبت به مدل SVM عملکرد بهتری دارد.

یکی از جنبه های مهم در ارزیابی مدل ها، ثبات عملکرد آن ها در مراحل آموزش و تست است. ELM با تابع فعال سازی چندجمله ای در هر دو مرحله، کمترین تغییرات را در مقادیر RMSE، NSE و R^2 نشان می دهد. به عنوان مثال، مقدار RMSE مدل ELM با تابع فعال سازی چندجمله ای از ۰/۱۷۴۷ در آموزش به ۰/۱۶۷۵ در تست تغییر کرده است، که نشان دهنده ثبات بالای این مدل در تعمیم پذیری و پیش بینی داده های جدید است. در مقابل، مدل SVM با کرنل چندجمله ای در مرحله تست افزایش نسبی (RMSE از ۰/۲۲۴۶ در آموزش به ۰/۲۲۱۸ در تست) و کاهش جزئی NSE و R^2 را نشان می دهد، که نشان دهنده حساسیت بیشتر آن به داده های جدید است. صرف نظر از تفاوت هایی که هر دو مدل دارند اما هر دو مدل به شدت تحت تأثیر نوع تابع فعال سازی (برای ELM) یا کرنل (برای SVM) هستند. در مدل ELM، تفاوت عملکرد بین بهترین و ضعیف ترین تابع فعال ساز (چندجمله ای در مقابل خطی) بسیار بارز است. این نشان می دهد که انتخاب تابع فعال سازی مناسب، نقش کلیدی در بهینه سازی عملکرد ELM دارد. به طور مشابه، در مدل SVM، کرنل چندجمله ای نتایج بهتری نسبت به کرنل های خطی و RBF ارائه داده است، اما تفاوت ها در این مدل کمتر محسوس هستند، که نشان دهنده انعطاف پذیری نسبی بیشتر SVM نسبت به انتخاب کرنل است.

یکی از چالش های مهم در استفاده از SVM، زمان زیاد محاسباتی است که برای بهینه سازی پارامترهای آن نیاز است. همان طور که النازی و گیتز^۱ (۲۰۱۰) توضیح داده اند، در فرایند جستجوی شبکه برای بهینه سازی SVM، مدل باید برای هر پارامتر در تعداد زیادی از نقاط شبکه ارزیابی شود. این جستجو که اغلب در ابعاد بزرگ و با مجموعه ای از پارامترهای پیچیده صورت می گیرد، به طور مستقیم منجر به افزایش هزینه های زمانی و محاسباتی می شود. از آنجاکه این جستجو باید برای پیدا کردن بهترین ترکیب پارامترها انجام شود، حجم محاسبات به ویژه در صورت افزایش اندازه داده و تعداد ویژگی ها بیشتر می شود. مدل ELM در این زمینه یک رویکرد کارآمدتر را به کار می گیرند. برخلاف SVM، این مدل به جستجوی شبکه برای تنظیم پارامترها نیازی ندارند، زیرا پارامترهای لایه پنهان آن ها به صورت تصادفی تنظیم می شوند و وزن های خروجی تنها با استفاده از روش های خطی محاسبه می شوند. این روش، همان طور که توسط ونگ و همکاران^۲ (۲۰۱۵) توضیح داده شده، منجر به کاهش پیچیدگی محاسباتی و همچنین کاهش نیاز به انجام تنظیمات پارامترها می شود. در نتیجه، ELM به سرعت می تواند به نتایج مطلوبی دست پیدا کند، بدون اینکه به جستجوی پیچیده ای برای بهینه سازی نیاز داشته باشند.

1. AlAnazi & Gates

2. Wang et al

مقایسه زمان موردنیاز برای توسعه مدل‌های ماشین بردار پشتیبان (SVR) و ماشین یادگیری شدید (ELM) نشان‌دهنده تفاوت‌های قابل توجه در عملکرد این دو روش از نظر سرعت محاسباتی است. بر اساس جدول (۳)، مدل ELM با همه توابع فعال ساز زمان کمتری نسبت به مدل SVR برای فرآیند آموزش نیاز دارد. این برتری زمانی در شرایطی که حجم داده‌ها بزرگ یا نیاز به پردازش سریع اطلاعات وجود داشته باشد، می‌تواند یک مزیت کلیدی به شمار رود. به‌طور خاص، ELM با تابع فعال‌ساز RBF کمترین زمان آموزش (۰/۰۲۷ ثانیه) را داشته است، در حالی که مدل SVR با کرنل چندجمله‌ای بیشترین زمان (۰/۰۷۶ ثانیه) را به خود اختصاص داده است. این نتایج نشان می‌دهد که مدل ELM نه تنها از لحاظ دقت عملکرد، بلکه از لحاظ کارایی زمانی نیز بهینه‌تر است. حتی در حالتی که تابع فعال‌ساز پیچیده‌تری مانند چند جمله‌ای استفاده می‌شود، زمان آموزش ELM (۰/۰۶۴ ثانیه) کمتر از زمان مربوط به SVR (۰/۰۷۶ ثانیه) است. از سوی دیگر، مدل SVR به دلیل ساختار پیچیده‌تر و نیاز به تنظیم پارامترهای کرنل، زمان بیشتری برای آموزش صرف می‌کند. این امر به‌ویژه در شرایطی که نیاز به بهینه‌سازی مکرر پارامترها برای یافتن بهترین عملکرد وجود داشته باشد، می‌تواند یک چالش جدی باشد.

جدول ۳. مقایسه مدت زمان لازم برای آموزش مدل SVM و ELM

SVR		ELM	
تابع کرنل	زمان (s)	تابع فعال‌ساز	زمان (s)
Linear	0.045	Linear	0.028
RBF	0.039	RBF	0.027
Sigmoid	0.054	Sigmoid	0.046
Polynomial	0.076	Polynomial	0.064

علاوه بر این نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که با تنظیمات بهینه تعداد نوروها در لایه‌های پنهان و انتخاب تابع فعال‌سازی مناسب، مدل ELM قادر به ارائه پیش‌بینی‌های دقیقی از سطح آب زیرزمینی است. این یافته‌ها می‌تواند به‌عنوان پایه‌ای برای تحقیقات آینده در بهبود مدل‌های شبیه‌سازی سطح آب زیرزمینی و سایر شبیه‌سازی‌های محیطی مورد استفاده قرار گیرد. در نهایت، انتخاب بین مدل‌های SVM و ELM به عوامل متعددی مانند نیازمندی‌های دقت، محدودیت‌های زمانی و منابع محاسباتی وابسته است. درحالی‌که مدل‌های ELM به دلیل سادگی ساختار و سرعت پردازش بالا در بسیاری از پروژه‌های کاربردی بهینه هستند، مدل‌های SVM همچنان در کاربردهایی که نیازمند دقت بالایی در جداسازی داده‌های پیچیده و غیرخطی هستند، برتری دارند. این ویژگی‌ها باعث می‌شود مدل ELM با سرعت بیشتری به نتایج مناسب برسد که آن را به گزینه‌ای خوب برای پیش‌بینی سریع و دقیق سطح آب‌های زیرزمینی تبدیل می‌کند.

بحث

دشت بهار در شمال غربی استان همدان و در نزدیکی شهر بهار واقع شده است که این دشت با مساحتی گسترده، به دلیل برخورداری از خاک‌های حاصلخیز و منابع آبی زیرزمینی، نقش قابل توجهی در تأمین محصولات کشاورزی استاندارد دارد. در این مطالعه، داده‌های ۱۰ ساله شامل سطح آب زیرزمینی، بارندگی، تبخیر و دما با گام زمانی ماهانه برای توسعه این مدل‌ها استفاده شد. تمامی متغیرها برای جلوگیری از بایاس شدن مدل‌ها به بازه ۰ تا ۱ نرمال‌سازی شدند و شاخص‌های RMSE، NSE و R^2 برای ارزیابی عملکرد مدل‌ها به کار گرفته شدند. این مطالعه به بررسی قابلیت مدل‌های یادگیری ماشین SVR و ELM در شبیه‌سازی سطح آب‌های زیرزمینی در مناطق نیمه‌خشک پرداخته است.

نتیجه‌گیری

نتایج حاصل از این مطالعه نشان داد که مدل ELM، به‌ویژه با استفاده از تابع فعال‌سازی چندجمله‌ای، در هر دو مرحله آموزش و آزمون از نظر دقت و کارایی عملکرد بهتری نسبت به SVR داشته است. در مقابل، SVR به‌ویژه هنگام استفاده از توابع فعال‌ساز پیچیده حجم محاسباتی بیشتری دارد.

با بهره‌گیری از سرعت و سادگی مدل ELM، همراه با تولنایی آن در پردازش کارآمد مجموعه داده‌های بزرگ، این مدل به‌عنوان یک جایگزین قابل اعتماد و محاسباتی کارآمد برای مدیریت پلیدار آب‌های زیرزمینی است. نتایج این تحقیق اهمیت تحقیق بیشتر در رویکردهای ترکیبی و استفاده از توابع فعال‌سازی پیشرفته در مدل ELM را برای افزایش سازگاری آن با شرایط مختلف نشان می‌دهد. هدف تحقیقات آینده می‌تواند ادغام این مدل‌ها با سیستم‌های جمع‌آوری داده‌های و ارزیابی عملکرد آن‌ها در آبخوان‌های مختلف باشد. علاوه بر این، بررسی تأثیر تکنیک‌های انتخاب متغیر ورودی و پیش‌پردازش داده‌ها بر عملکرد مدل می‌تواند قابلیت‌های پیش‌بینی رویکردهای یادگیری ماشین را بهبود بخشد. با توجه به این جنبه‌ها، این تحقیق به‌عنوان یک مبنا برای توسعه سیستم‌های پشتیبانی تصمیم‌گیری قوی برای مدیریت منابع آب زیرزمینی در مناطق خشک و نیمه‌خشک عمل می‌کند.

ملاحظات اخلاقی

پیروی از اصول اخلاق پژوهش

نویسندگان اصول اخلاقی را در انجام و انتشار این پژوهش علمی رعایت نموده‌اند و این موضوع مورد تأیید همه آن‌هاست.

تعارض منافع

بنا بر اظهار نویسندگان این مقاله تعارض منافع ندارد.

منابع

ملک‌زاده، مریم، کاردار، سعید، صائب، کیوان، شعبانلو، سعید، و تقوی، لعبت. (۱۳۹۷). پیش‌بینی تراز آب زیر زمینی با استفاده از مدل‌های مادفلو، ماشین آموزش نیرومند و ویولت-ماشین آموزش نیرومند. مجله تحقیقات منابع آب ایران، ۱۴(۵)، ۴۹۶-۵۰۱. https://www.wrr.ir/article_66468.html

References

- Afruzi, A., Zare Abyaneh, H., & Abdolabadi, H. (2021). Local strategies to manage groundwater depletion under climate change scenarios—a case study: Hamedan-Bahar Plain (Iran). *Arabian Journal of Geosciences*, 14(15), 1548. <http://dx.doi.org/10.1007/s12517-021-07773-1>
- Ahmadi, A., Olyaei, M., Heydari, Z., Emami, M., Zeynolabedin, A., Ghomlaghi, A., Daccache, A., Fogg, G. E., & Sadegh, M. (2022). Groundwater level modeling with machine learning: a systematic review and meta-analysis. *Water*, 14(6), 949. <https://doi.org/10.3390/w14060949>
- Ahmed, H. U., Mostafa, R. R., Mohammed, A., Sihag, P., & Qadir, A. (2023). Support vector regression (SVR) and grey wolf optimization (GWO) to predict the compressive strength of GGBFS-based geopolymer concrete. *Neural Computing and Applications*, 35(3), 2909-2926. <https://doi.org/10.1007/s00521-022-07724-1>
- Alizamir, M., Kazemi, Z., Kazemi, Z., Kermani, M., Kim, S., Heddami, S., Kisi, O., & Chung, I.-M. (2023). Investigating landfill leachate and groundwater quality prediction using a robust integrated artificial intelligence model: Grey wolf metaheuristic optimization algorithm and extreme learning machine. *Water*, 15(13), 2453. <https://doi.org/10.3390/w15132453>
- Aman Jalili, A., Najarchi, M., Shabanlou, S., & Jafarinia, R. (2023). Multiobjective optimization of water resources in real time based on integration of NSGA-II and support vector machines. *Environ Sci Pollut Res*, 30, 16464–16475. <https://doi.org/10.1007/s11356-022-22723-4>
- Amiri, S., Rajabi, A., Shabanlou, S., Yosefvand, F., & Izadbakhsh, M.A. (2023). Prediction of groundwater level variations using deep learning methods and GMS numerical model. *Earth Sci Inform*, 16, 3227–3241. <https://doi.org/10.1007/s12145-023-01052-1>
- Azizi, E., Yosefvand, F., Yaghoubi, B., Izadbakhsh, M.A., & Shabanlou, S. (2023) Modelling and prediction of groundwater level using wavelet transform and machine learning methods: A case study for the Sahneh Plain, Iran. *Irrigation and Drainage*, 72(3), 747–762. <https://doi.org/10.1002/ird.2794>
- Azizpour, A., Izadbakhsh, M. A., Shabanlou, S., Yosefvand, F., & Rajabi, A. (2021). Estimation of water level fluctuations in groundwater through a hybrid learning machine. *Groundwater for Sustainable Development*, 15, 100687. <http://dx.doi.org/10.1016/j.gsd.2021.100687>
- Balali, H., & Kasbian Lal, F. (2022). Economic Valuation of Groundwater in Agriculture Sector (Case Study: Hamedan-Bahar Plain). *Journal of Agricultural Economics and Development*, 36(1), 37-48. <https://doi.org/10.22067/jead.2022.72334.1079>
- Balogun, A.-L., Rezaie, F., Pham, Q. B., Gigović, L., Drobnjak, S., Aina, Y. A., Panahi, M., Yekeen, S. T., & Lee, S. (2021). Spatial prediction of landslide susceptibility in western Serbia using hybrid support vector regression (SVR) with GWO, BAT and COA algorithms. *Geoscience Frontiers*, 12(3), 101104. <https://doi.org/10.1016/j.gsf.2020.10.009>
- Band, S. S., Heggy, E., Bateni, S. M., Karami, H., Rabiee, M., Samadianfard, S., Chau, K.-W., & Mosavi, A. (2021). Groundwater level prediction in arid areas using wavelet analysis and Gaussian process regression. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 15(1), 1147-1158. <http://dx.doi.org/10.1080/19942060.2021.1944913>
- Esmacili, F., Shabanlou, S., & Saadat, M. (2021). A wavelet-outlier robust extreme learning machine for rainfall forecasting in Ardabil City, Iran. *Earth Sci Inform*. 14, 2087–2100. <https://doi.org/10.1007/s12145-021-00681-8>
- Fallahi, M.M., Shabanlou, S., Rajabi, A., Yosefvand, F., & IzadBakhsh, M.A. (2023). Effects of climate change on groundwater level variations affected by uncertainty (case study: Razan aquifer). *Appl Water Sci*. 13(143). <https://doi.org/10.1007/s13201-023-01949-8>

- Gaur, S., Johannet, A., Graillot, D., & Omar, P. J. (2021). Modeling of groundwater level using artificial neural network algorithm and WA-SVR model. *Groundwater resources development and planning in the semi-arid region*, Springer, Cham, New York Sity, United states. https://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-68124-1_7
- Gharib, R., Heydari, M., Kardar, S., & Shabanlou, S. (2020). Simulation of discharge coefficient of side weirs placed on convergent canals using modern self-adaptive extreme learning machine. *Appl Water Sci*, 10, 50. <https://doi.org/10.1007/s13201-019-1136-0>
- Ghobadi, A., Cheraghi, M., Sobhanardakani, S., Lorestani, B., & Merrikhpour, H. (2020). Hydrogeochemical characteristics, temporal, and spatial variations for evaluation of groundwater quality of Hamedan–Bahar Plain as a major agricultural region, *West of Iran. Environmental Earth Sciences*, 79(18), 428. <https://link.springer.com/article/10.1007/s12665-020-09177-y>
- Huang, G.-B., Wang, D. H., & Lan, Y. (2011). Extreme learning machines: a survey. *International journal of machine learning and cybernetics*, 2, 107-122. <http://dx.doi.org/10.1007/s13042-011-0019-y>
- Huang, G.-B., Zhu, Q.-Y., & Siew, C.-K. (2006). Extreme learning machine: theory and applications. *Neurocomputing*, 70(1-3), 489-501. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2005.12.126>
- Jakeman, A. J., Barreteau, O., Hunt, R. J., Rinaudo, J.-D., & Ross, A. (2016). Integrated groundwater management. *Springer Nature*, Cham, New York Sity, United states. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-23576-9>
- Jalilian, A., Heydari, M., Azari, A., & Shabanlou, S. (2022). Extracting optimal rule curve of dam reservoir base on stochastic inflow. *Water Resour Manage*, 36, 1763–1782. <https://doi.org/10.1007/s11269-022-03087-3>
- Kinzelbach, W., Bauer, P., Siegfried, T., & Brunner, P. (2003). Sustainable groundwater management—problems and scientific tools. *Episodes Journal of International Geoscience*, 26(4), 279-284. <http://dx.doi.org/10.18814/epiugs/2003/v26i4/002>
- Kumar, D., Roshni, T., Singh, A., Jha, M. K., & Samui, P. (2020). Predicting groundwater depth fluctuations using deep learning, extreme learning machine and Gaussian process: a comparative study. *Earth Science Informatics*, 13(4), 1237-1250. <https://link.springer.com/article/10.1007/s12145-020-00508-y>
- Levintal, E., Kniffin, M. L., Ganot, Y., Marwaha, N., Murphy, N. P., & Dahlke, H. E. (2023). Agricultural managed aquifer recharge (Ag-MAR)—a method for sustainable groundwater management: A review. *Critical Reviews in Environmental Science and Technology*, 53(3), 291-314. <https://doi.org/10.1080/10643389.2022.2050160>
- Li, J., Lu, W., Wang, H., Fan, Y., & Chang, Z. (2020). Groundwater contamination source identification based on a hybrid particle swarm optimization-extreme learning machine. *Journal of Hydrology*, 584, 124657. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2020.124657>
- Malekzadeh, M., Kardar, S., Saeb, K., Shabanlou, S., Taghavi, L. (2019). 'Prediction of Groundwater Level using MODFLOW, Extreme Learning Machine and Wavelet-Extreme Learning Machine Models. *Iran-Water Resources Research*, 14(5), 496-501. (In Persian) https://www.iwrr.ir/article_66468.html
- Mallick, J., Naikoo, M. W., Talukdar, S., Ahmed, I. A., Rahman, A., Islam, A. R. M. T., Pal, S., Ghose, B., & Shashtri, S. (2022). Developing groundwater potentiality models by coupling ensemble machine learning algorithms and statistical techniques for sustainable groundwater management. *Geocarto International*, 37(25), 7927-7953. <http://dx.doi.org/10.1080/10106049.2021.1987535>
- Mazraeh, A., Bagherifar, M., Shabanlou, S., & Ekhlasmand, R. (2023). A hybrid machine learning model for modeling nitrate concentration in water sources. *Water, Air, & Soil Pollution*, 234(11), 721. <http://dx.doi.org/10.1007/s11270-023-06745-3>

- Mazraeh, A., Bagherifar, M., Shabanlou, S., & Ekhlasmand, R. (2024). A novel committee-based framework for modeling groundwater level fluctuations: A combination of mathematical and machine learning models using the weighted multi-model ensemble mean algorithm. *Groundwater for Sustainable Development*, 24, 101062. <https://doi.org/10.1016/j.gsd.2023.101062>
- Mirarabi, A., Nassery, H., Nakhaei, M., Adamowski, J., Akbarzadeh, A., & Alijani, F. (2019). Evaluation of data-driven models (SVR and ANN) for groundwater-level prediction in confined and unconfined systems. *Environmental Earth Sciences*, 78, 1-15. <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs12665-019-8474-y>
- Moghadam, R.G., Yaghoubi, B., Rajabi, A., Shabanlou, S., & Izadbakhsh, M.A. (2022). Evaluation of discharge coefficient of triangular side orifices by using regularized extreme learning machine. *Appl Water Sci*, 12, 145. <https://doi.org/10.1007/s13201-022-01665-9>
- Mohammed, K.S., Shabanlou, S., Rajabi, A., Yosefvand, F., & Izadbakhsh, M.A. (2023). Prediction of groundwater level fluctuations using artificial intelligence-based models and GMS. *Appl Water Sci*, 13, 54 (2023). <https://doi.org/10.1007/s13201-022-01861-7>
- Norouzi Khatiri, K., Nematollahi, B., Hafeziyeh, S., Niksokhan, M. H., Nikoo, M. R., & Al-Rawas, G. (2023). Groundwater management and allocation models: a review. *Water*, 15(2), 253. <https://doi.org/10.3390/w15020253>
- Panahi, J., Mastouri, R., & Shabanlou, S. (2022). Insights into enhanced machine learning techniques for surface water quantity and quality prediction based on data pre-processing algorithms. *J Hydroinf*, 24(4), 875–897. <https://doi.org/10.2166/hydro.2022.022>
- Panahi, M., Sadhasivam, N., Pourghasemi, H. R., Rezaie, F., & Lee, S. (2020). Spatial prediction of groundwater potential mapping based on convolutional neural network (CNN) and support vector regression (SVR). *Journal of Hydrology*, 588, 125033. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2020.125033>
- Rafieemehr, H., Kozegarkaleji, L. (2021). Analyzing spatiotemporal relationship between land use changes and groundwater quantity in Hamadan north plains. *Environmental Sciences*, 19(1), 259-276. <https://doi.org/10.52547/envs.29307>
- Roshni, T., Mirzania, E., Hasanpour Kashani, M., Bui, Q.-A. T., & Shamshirband, S. (2022). Hybrid support vector regression models with algorithm of innovative gunner for the simulation of groundwater level. *Acta Geophysica*, 70(4), 1885-1898. <https://doi.org/10.1007/s11600-022-00826-3>
- Shabanlou, S. (2018). Improvement of extreme learning machine using self-adaptive evolutionary algorithm for estimating discharge capacity of sharp-crested weirs located on the end of circular channels. *Flow Measurement and Instrumentation*, 59, 63-71. <https://doi.org/10.1016/j.flowmeasinst.2017.11.003>
- Shahbazi, M., Zarei, H., & Solgi, A. (2023). De-noising groundwater level modeling using data decomposition techniques in combination with artificial intelligence (case study Aspas aquifer). *Applied Water Science*, 13(4), 88. <https://doi.org/10.1007/s13201-023-01885-7>
- Singh, A., Patel, S., Bhadani, V., Kumar, V., & Gaurav, K. (2024). AutoML-GWL: Automated machine learning model for the prediction of groundwater level. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 127, 107405. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engappai.2023.107405>
- Smola, A. J., & Schölkopf, B. (2004). A tutorial on support vector regression. *Statistics and computing*, 14, 199-222. <https://doi.org/10.1023/B:STCO.0000035301.49549.88>
- Sun, J., Hu, L., Li, D., Sun, K., & Yang, Z. (2022). Data-driven models for accurate groundwater level prediction and their practical significance in groundwater management. *Journal of Hydrology*, 608, 127630. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jhydrol.2022.127630>
- Tang, W., Zhao, X., Motagh, M., Bi, G., Li, J., Chen, M., Chen, H., & Liao, M. (2022). Land subsidence and rebound in the Taiyuan basin, northern China, in the context of inter-basin

- water transfer and groundwater management. *Remote Sensing of Environment*, 269, 112792. <https://doi.org/10.1016/j.rse.2021.112792>
- Tao, H., Hameed, M. M., Marhoon, H. A., Zounemat-Kermani, M., Heddam, S., Kim, S., Sulaiman, S. O., Tan, M. L., Sa'adi, Z., & Mehr, A. D. (2022). Groundwater level prediction using machine learning models: A comprehensive review. *Neurocomputing*, 489, 271-308. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2022.03.014>
- Zhang, F., & O'Donnell, L. J. (2020). Support vector regression. *Machine learning*, Elsevier, Amsterdam, Netherlands. 123-140. <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-12-815739-8.00007-9>